

### 1. Welche Rolle spielt die Modulationsübertragungsfunktion bei der Beurteilung bildgebender Verfahren?

Mit Hilfe der Modulationsübertragungsfunktion (modulation transfer function, MTF) lassen sich wichtige Merkmale der Güte eines bildgebenden Verfahrens wie die (laterale) Ortsauflösung und der Kontrast bestimmen. Doch um zu verstehen, wie eine solche deschehen kann, muß zunächst erläutert werden, was unter der Modulationsübertragungsfunktion zu verstehen ist und wie sie mit den genannten Qualitätsmerkmalen zusammenhängt.

Die Modulationsübertragungsfunktion beschreibt die Abschwächung des Kontrastes einer abzubildenden Struktur, welche durch eine gegebene Unschärfe der Abbildung entsteht. Um diese mathematisch fassen zu können, geht man von einer periodischen Leuchtdichteverteilung

$$g(x) = 1 + g_0 \sin(kx), \quad 0 \leq g_0 \leq 1$$

(ideales Sinusgitter) als zu übertragender Struktur aus, wobei  $k/2\pi$  die Ortsfrequenz des Gitters und somit der Kehrwert den Abstand zwischen zwei Maxima bedeutet. Die Unschärfe der Übertragung bedeutet nun, daß zu einem Punkt  $x$  der Abbildung mit einer Wahrscheinlichkeit  $L(x-x')dx'$  auch Punkte der abzubildenden Struktur in einem Intervall  $dx'$  beitragen. Über alle solche Intervalle summiert, ergibt sich der integrale Ausdruck

$$b(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(x-x')g(x')dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-x')L(x')dx', \quad \int_{-\infty}^{+\infty} L(x')dx' = 1,$$

wobei zur ersten Umformung  $x' \rightarrow x-x'$  ersetzt wurde. Der Einfachheit halber seien alle nachfolgenden Integrale als in den Grenzen  $-\infty$  und  $+\infty$  verlaufend verstanden. Für das gewählte ideale Sinusgitter (aus diesem Grunde ist es eben gewählt) läßt sich das Additionstheorem

$$\sin(k(x-x')) = \sin(kx) \cos(kx') - \cos(kx) \sin(kx')$$

verwenden, und mit den Setzungen

$$M^2 := \left[ \int \cos(kx')L(x')dx' \right]^2 + \left[ \int \sin(kx')L(x')dx' \right]^2, \\ M \cos \varphi := \int \cos(kx')L(x')dx', \quad M \sin \varphi := \int \sin(kx')L(x')dx'$$

erhält man für die Bildfunktion

$$b(x) = \int L(x')dx' + g_0 \sin(kx) \int \cos(kx')L(x')dx' + \\ - g_0 \cos(kx) \int \sin(kx')L(x')dx' = \\ = 1 + g_0 M \sin(kx) \cos \varphi - g_0 M \cos(kx) \sin \varphi = 1 + g_0 M \sin(kx - \varphi),$$

wobei zum Schluß wieder das Additionstheorem in umgekehrter Richtung zum Tragen kam. Der Parameter  $M$  ist positiv definiert und besitzt einen Wert größer oder gleich 1, was sich aus der komplexen Darstellung  $e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$  ergibt,

$$1 = \int L(x') dx' = \int |e^{ikx'} L(x')| dx' \geq \left| \int e^{ikx'} L(x') dx' \right| = M \geq 0.$$

Der Kontrast von Gegenstands- bzw. Bildfunktion (der häufig auch als Modulation bezeichnet wird) läßt sich definieren als

$$K_g := \frac{\max g(x) - \min g(x)}{\max g(x) + \min g(x)}, \quad K_b := \frac{\max b(x) - \min b(x)}{\max b(x) + \min b(x)}.$$

Für das ideale Sinusgitter und sein Bild erhält man  $K_g = g_0$  und  $K_b = g_0 M$ , das Verhältnis aus Bildkontrast und Gegenstandskontrast ist also  $K_b/K_g = M$  und wird als Modulationsübertragungsfunktion bezeichnet. Diese Modulationsübertragungsfunktion ist abhängig von der Ortsfrequenz und damit von  $k$ , es ist  $M(k \rightarrow 0) = 1$  und  $\varphi(k \rightarrow 0) = 0$ , wovon man sich leicht überzeugt. Ein „Gitter“ verschwindender Ortsfrequenz wird also nie schlechter übertragen als ein Gitter einer nichtverschwindenden Ortsfrequenz. Im Normalfall fällt die Modulationsübertragungsfunktion mit wachsender Ortsfrequenz monoton ab. Als Grenzfrequenz wird dabei diejenige Frequenz bezeichnet, bei welcher die Modulationsübertragungsfunktion den Wert 4% erreicht hat.

Um verschiedene Abbildungssysteme miteinander vergleichen zu können, zeichnet man die Modulationsübertragungsfunktion als Funktion der Frequenz in ein gemeinsames Koordinatensystem ein. Das Abbildungssystem, welches länger dem Idealwert  $M = 1$  nahe bleibt, wird als Abbildungssystem mit der höheren Güte bezeichnet. Uneindeutig wird die Entscheidung, wenn sich die beiden Kurven ein- oder mehrfach schneiden. Doch kann man hier Aussagen darüber treffen, welches Abbildungssystem in welchem Ortsfrequenzbereich die höhere Qualität besitzt.

Auch die Beurteilung einer Abbildungskette ist mit Hilfe der Modulationsübertragungsfunktion möglich, denn es ist

$$\begin{aligned} b_1(x) &= 1 + g_0 M_1 \sin(kx - \varphi_1) =: 1 + b_0 \sin(k\tilde{x}) \quad \text{und} \\ b_2(x) &= 1 + b_0 M_2 \sin(k\tilde{x} - \varphi_2) = 1 + g_0 M_1 M_2 \sin(kx - \varphi_1 - \varphi_2) = \\ &= 1 + g_0 M_{12} \sin(kx - \varphi_{12}). \end{aligned}$$

Hieraus lesen wir für die Modulationsübertragungsfunktionen  $M_{12} = M_1 M_2$  und für die Phasenverschiebung  $\varphi_{12} = \varphi_1 + \varphi_2$  ab. In der praktischen Anwendung werden die Modulationsübertragungsfunktionen der einzelnen Glieder der Kette auf den gleichen Abbildungsmaßstab normiert und in einem Kurvenblatt miteinander verglichen. Das schwächste Glied der Kette, also dasjenige mit der am schnellsten abfallenden Modulationsübertragungsfunktion, begrenzt die Modulationsübertragungsfunktion der Gesamtkette aufgrund der multiplikativen Eigenschaft. So bietet sich die Möglichkeit, die Abbildungskette zu verbessern und damit die Abbildungsqualität zu optimieren.

**2. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den Abbildungsfehlern der Linsen und der Modulationsübertragungsfunktion?**

Die Modulationsübertragungsfunktion beeinflussen all diejenigen Linsenfehler, die einen Gegenstandspunkt in ein wie auch immer geartetes Scheibchen endlicher Ausmessung in der Projektionsebene abbildet. Es sind dies alle unter Punkt 3 genannten Abbildungsfehler mit Ausnahme der Distorsion. Die Intensitätsverteilung bei Abbildung eines Punktes kann, geeignet normiert, den Platz der Funktion  $L(x)$  in der Rechnung zum vorangegangenen Punkt einnehmen, womit die Modulationsübertragungsfunktion in ihrer Abhängigkeit von der Ortsfrequenz berechenbar wird.

**3. Beschreiben und erläutern Sie die Abbildungsfehler, die durch Anwendung von Linsen entstehen können.**

Die Abbildungsfehler fallen in die folgenden Kategorien:

1. *Sphärische Aberration* ergibt sich aufgrund der sphärisch gekrümmten Oberfläche von Hohlspiegel bzw. Linse, ein Strahlenbündel aus unendlicher Entfernung bildet eine Katakaustik (Spiegel) bzw. Diakaustik (Linse). Diese sphärische Aberration läßt sich beim Hohlspiegel zum Beispiel durch Verwendung einer parabolischen statt sphärischen Wölbung vermeiden.
2. *Astigmatismus* entsteht dadurch, daß Linsen in zueinander und zur Linsenebene senkrecht stehenden Ebenen unterschiedlich gekrümmt sind, wenn das Strahlenbündel nicht auf das Zentrum der Linse, sondern lateral auftrifft. Die Brennweiten sind für diese beiden Ebenen unterschiedlich, es existiert kein gemeinsamer Brennpunkt, vielmehr zwei jeweils eindimensionale Brennstriche. Als günstigster Punkt erweist sich jedoch derjenige zwischen diesen Entfernungen, an dem ein kreisförmiges Abbild des Lichtpunktes entsteht. An dieser Stelle ist ein Minimum an Konfusion erreicht.
3. *Krümmung der Bildebene* bedeutet, daß Gegenstandspunkte, die in einer Ebene liegen, nicht wieder in eine Ebene abgebildet werden müssen. Das Abbild in einer Ebene ist in irgendeinem Bereich immer unscharf.

Die unter (1) bis (3) genannten Abbildungsfehler lassen sich durch eingesetzte Blenden (also durch Beschränkung auf den Gültigkeitsbereich paraxialer Optik) unterdrücken. Dies gilt jedoch nicht für die folgenden Abbildungsfehler.

4. *Distorsion* meint die kissen- oder tonnenförmige Verzerrung des Abbildes. Parallele Linien sind nach der Abbildung nicht mehr parallel, sondern gegeneinander gekrümmt. Dieser Effekt wird durch Blenden verstärkt.
5. *chromatische Aberration* ist eine Folge der Spektralabhängigkeit des Brechungsindex und bewirkt beispielsweise in Glaslinsen, daß kurzwelliges Licht (violett) stärker gebrochen wird als langwelliges (rot). Es läßt sich durch speziell konzipierte Linsenkombinationen (Achromate aus Kron- und Flintglas) vermeiden.

#### 4. Beschreiben und erläutern Sie das Vergrößerungs- und Auflösungsvermögen des Mikroskops.

Mikroskope bestehen im wesentlichen aus zwei Linsen(systemen), dem Objektiv und dem Okular. Das Objektiv, das zum Gegenstand hin gerichtet liegt, entwirft von diesem im Tubus des Mikroskops ein reelles, vergrößertes Bild. Wichtig ist dazu, daß die Gegenstandsweite außerhalb der einfachen, aber innerhalb der zweifachen Brennweite des Objektivs zu liegen kommt. Dieses reelle Bild wird nun vom Okular betrachtet und erneut vergrößert. Da es aber innerhalb der einfachen Brennweite des Okulars liegt, entsteht ein virtuelles Bild, das vom Betrachter wahrgenommen wird. Die Vergrößerung des Abbildungssystems, welches das Mikroskop darstellt, berechnet sich aus dem Produkt der Vergrößerungen von Objektiv und Okular.

Das Auflösungsvermögen ergibt sich aus der Beugungstheorie. Dazu wird das Interferenzmuster eines Scheibchens des Radius  $d$  betrachtet. Das erste Minimum des Interferenzmusters, aufgetragen gegen die Appertur  $A = n \sin \alpha$  ( $n$  ist der Brechungsindex des Mediums zwischen Objekt und Objektiv) liegt bei  $\lambda/d$ , wobei  $\lambda$  die Wellenlänge des Lichtes ist. Das Scheibchen kann dann noch optisch aufgelöst werden, wenn das nächste Intensitätsmaximum in dieses Minimum fällt. Ausgedrückt durch die Appertur  $A$  des Mikroskops ergibt sich für das Auflösungsvermögen damit

$$d = k \cdot \frac{\lambda}{A}.$$

$k \approx 0.5$  ist ein physiologischer Faktor, der empirisch eingeführt wurde. Doch ist die Ursache für eine physiologisch bedingte Auflösungssteigerung weitgehend unbekannt. Wichtig für die Qualitätseigenschaften eines Mikroskops ist auch die Schärfentiefe, die sich als Summe eines ersten Anteils gemäß der geometrischen Optik und eines zweiten aus der Wellenoptik ergibt,

$$\frac{d}{A \cdot v_M} + \frac{\lambda}{2A^2} \quad (v_M \text{ ist die Vergrößerung des Mikroskops})$$

#### 5. Wie werden Auflösungsvermögen und Kontraste zur Beurteilung bildgebender Verfahren benutzt?

Beide Kriterien lassen sich durch die Modulationsübertragungsfunktion bestimmen, und die Qualität eines bildgebenden Verfahrens ist umso höher einzuschätzen, je länger diese Funktion ihrem Idealwert  $M = 1$  in ihrer Abhängigkeit von der Ortsfrequenz nahe bleibt. Gemessen wird die Modulationsübertragungsfunktion einer Abbildungskette mit Balkengittern (bei Röntgenstrahlung aus Blei), wobei die Meßanordnung selbst als Glied der Abbildungskette aufzufassen ist. Diese ist nur dann zur Messung geeignet, wenn die Grenzfrequenz ihrer Modulationsübertragungsfunktion höher liegt als die größte übertragene Frequenz.