

Vorlesung zur Physik I

gehalten von

**Prof. Dr. Dietmar Fröhlich
und Prof. Dr. Joachim Treusch
im Wintersemester 1983/84
an der Universität Dortmund**

herausgegeben von Stefan Groote

Vorwort

Das vorliegende Skript lehnt sich an den Inhalt der Vorlesung zur „Physik I“ an, die von Herrn Prof. Dietmar Fröhlich* und Herrn Prof. Joachim Treusch** im Wintersemester 1983/84 an der Universität Dortmund im Wechsel gehalten wurde. Dieser Wechsel stellt eines der Grundprinzipien der integrierten Anfängerkurse zur Physik an der Universität Dortmund dar, welcher den Studierenden sowohl die experimentellen als auch die theoretischen Aspekte in gleicher Weise vor Augen führen soll. Der erste der insgesamt vier integrierten Kurse führt ein in die Newtonsche Mechanik, die Wärmelehre und die spezielle Relativitätstheorie in Form der Lorentzgleichungen.

Mainz, im März 2012

Stefan Groote***

Literaturhinweise

- +++ C. Kittel, W. Knight, M. Ruderman, „Berkeley Physik-Kurs, Band 1: Mechanik“, 5. verb. Aufl. Springer, 1991, 257 Seiten, ISBN 978-3-540-41569-5 (Die in zur Vorlesung empfohlene 3. vollständig neu bearbeitete Auflage erschien noch im Vieweg Verlag und verwendete SI-Einheiten statt der CGS-Einheiten im englischsprachigen Original.)
- ++ M. Alonso und E.J. Finn, „Fundamental Universal Physics, Vol. I: Mechanics“, Addison Wesley 1983
- + C. Gerthsen, H.O. Kneser, H. Vogel, „Physik: Ein Lehrbuch“, 17. Aufl. Springer Verlag, 1993, ISBN 978-0-387-06336-2 (Zur Vorlesung lag die 10. Auflage von 1969 vor und wurde zum Nachschlagen empfohlen.)
- +++ Richard P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, „Vorlesungen über Physik, Band I: Hauptsächlich Mechanik, Strahlung, Wärme“, deutsch von Heinz Köhler und Eckhard Schröder, Oldenbourg Verlag, München, 1991, 4. Aufl. 2001, ISBN 978-3-486-25680-7 (Zur Vorlesung lag „The Feynman Lectures on Physics, Vol. I: Mainly Mechanics“ in zweisprachiger Version vor.)
- ++ S. Brandt, H.D. Dahmen, „Eine Einführung in Experiment und Theorie, Band I: Mechanik“, 4. Aufl. Springer Verlag, 2004, 561 Seiten, ISBN 978-3-540-21666-7 (damals 1977, paperback, zum Nachschlagen)
- + G. Falk, W. Ruppel, „Mechanik, Relativität, Gravitation“, Springer Verlag, 1973, 442 Seiten
- +++ R.W. Pohl, „Einführung in die Physik, Band 1: Mechanik, Akustik und Wärmelehre“, 20., von K. Lüders und R.O. Pohl neu bearb. Aufl. 2009, ISBN 978-3-540-76337-6 (zur Vorlesung 18. Auflage 1983, 1. Auflage 1930)

Die Kreuze geben die Nützlichkeit der Literatur für die Vorlesung an.

* Lehrstuhl für Experimentelle Physik II der Universität Dortmund

** Lehrstuhl für Theoretische Physik II der Universität Dortmund

*** Institut für Physik der Universität Mainz (THEP), und Tartu Ülikool, Füüsika Instituut, väljateooria labor, Estland

Inhaltsverzeichnis

Vorwort und Literaturhinweise	2
Inhaltsverzeichnis	3
1. Mechanik	6
1.1 Kinematik – Beschreibung der Bewegung	6
1.1.1 Galileisches Prinzip	8
1.1.2 Bewegungen in einem beschleunigten Bezugssystem	9
1.1.3 Bewegungen in einem rotierenden Bezugssystem	10
1.1.4 Zentrifugal- und Corioliskraft	10
1.2 Dynamik – Die Newtonschen Gesetze	12
1.2.1 Zentralkräfte	12
1.2.2 Das Experiment von Cavendish	13
1.2.3 Das Experiment von Eötvös	14
1.2.4 Die Alwoodsche Fallmaschine	14
1.2.5 Fall über die Tischkante	15
1.3 Experimente zur Newtonschen Mechanik	16
1.3.1 Versuch zum Impulssatz	16
1.3.2 Versuch zur schiefen Ebene	16
1.3.3 Liegender Flaschenzug	17
1.3.4 Das zerrissene Seil	17
1.4 Auswirkungen der Erdbewegung	18
1.4.1 Die Zentrifugalbeschleunigung	18
1.4.2 Die Coriolisbeschleunigung	19
1.4.3 Das Foucaultsche Pendel	20
1.5 Erhaltungssätze	21
1.5.1 Der Impulssatz	21
1.5.2 Der Drehimpulssatz	22
1.5.3 Der Energiesatz	24
1.6 Experimente zu den Erhaltungssätzen	25
1.6.1 Die Rakete	25
1.6.2 Zwei elastisch stoßende Kugeln	26
1.6.3 Elastischer Stoß im Fall	27
1.6.4 Klick-Klack mit schwerer Kugel	28
1.6.5 Inelastischer Stoß	28
1.6.6 Konservative und nichtkonservative Kräfte	29

2. Anwendungen der Newtonschen Mechanik	30
2.1 Konservative Kräfte.....	30
2.1.1 Das Potential.....	31
2.1.2 Andere Koordinatensysteme.....	32
2.1.3 Der Gradient in ebenen Polarkoordinaten.....	33
2.1.4 Astronautische Geschwindigkeit.....	33
2.1.5 Beispiele für Potentiale.....	34
2.1.6 Impulssatz aus Energiesatz und Galileiinvarianz.....	35
2.2 Nichtkonservative Kräfte.....	35
2.2.1 Die Reibungskraft.....	35
2.2.2 Viskose Flüssigkeit.....	36
2.2.3 Etwas Vorarbeit: das Archimedische Prinzip.....	37
2.2.4 Stokessches Gesetz und Messung der Viskosität.....	38
2.3 Schwingungen.....	40
2.3.1 Versuch zum Fadenpendel.....	40
2.3.2 Bewegungsgleichungen.....	40
2.3.3 Gedämpfte Schwingungen.....	42
2.3.4 Schwingungsexperimente.....	44
2.3.5 Erzwungene Schwingungen.....	45
2.3.6 Energiebetrachtungen.....	46
2.4 Vielteilchensysteme.....	47
2.4.1 Schwingungen der Federkette.....	47
2.4.2 Eigenschwingungen.....	48
2.4.3 Charakteristikenmethode und Schwebung.....	49
2.4.4 Energiebetrachtungen und Experimente.....	50
2.5 Symmetrien und Erhaltungssätze.....	52
2.5.1 Schwerpunkt, Impulssatz und reduzierte Masse.....	52
2.5.2 Der Drehimpulssatz.....	54
2.5.3 Der Energiesatz.....	55
2.6 Die Keplerschen Gesetze.....	57
2.6.1 Induktives Verfahren.....	58
2.6.2 Deduktives Verfahren.....	59
2.6.3 Die drei Konstruktionen der Ellipse.....	61
2.7 Dynamik starrer Körper.....	63
2.7.1 Drehungen um eine feste Achse.....	63
2.7.2 Trägheitsmoment und Steinerscher Satz.....	64
2.7.3 Einführung in die Tensorrechnung.....	68
2.7.4 Herleitung der Bewegungsgleichungen.....	70
2.7.5 Trägheitsellipsoid und Hauptachsentransformation.....	71
2.7.6 Das Reversionspendel.....	73
2.7.7 Experimente mit Kreiseln.....	74

3. Wärmelehre	75
3.1 Kinetische Gastheorie	75
3.1.1 Ideales Gas und adiabatischer Prozess	76
3.1.2 Das Temperaturkonzept	77
3.1.3 Eichung der Temperaturskala	78
3.1.4 Die barometrische Höhenformel	78
3.1.5 Einheiten des Drucks	79
3.2 Der Begriff der Wärme	79
3.2.1 Der erste Hauptsatz der Thermodynamik	79
3.2.2 Die spezifische Wärme	79
3.2.3 Die Entropie	81
3.2.4 Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik	81
3.3 Thermodynamische Prozesse	81
3.3.1 Carnotscher Kreisprozess	82
3.3.2 Der Stirlingmotor	83
3.3.3 Der Satz von Clausius	84
3.3.4 Das Gay-Lussacsche Gedankenexperiment	84
4. Spezielle Relativitätstheorie	86
4.1 Die Vereinigung von Raum und Zeit	86
4.1.1 Der Dopplereffekt	87
4.1.2 Das Experiment von Michelson und Morley	87
4.1.3 Lorentztransformationen	88
4.1.4 Längenkontraktion	89
4.1.5 Zeitdilatation	91
4.1.6 Relativistischer Dopplereffekt	91
4.2 Relativistische Kinematik	92
4.2.1 Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit	92
4.2.2 Relativistische Addition von Geschwindigkeiten	95
4.2.3 Der relativistische Impuls	96
4.2.4 Die relativistische Energie	97
4.2.5 Transformation von Energie und Impuls	98
4.2.6 Vollständiger inelastischer Stoß und Bindungsenergie	98
4.2.7 Versuch zur Relativistik	99
4.3 Vierervektoren	100
4.3.1 Kausalität und Lichtkegel	101
4.3.2 Transformationen und Metrik	102
4.3.3 Andere Vierervektoren	102
4.3.4 Kovariante Form des Energiesatzes	103
4.3.5 Physikalische Gesetze in bewegten Systemen	104
4.3.6 Stetig beschleunigte Rakete	104
4.4 Zur allgemeinen Relativitätstheorie	107
4.4.1 Gravitationelle Frequenzverschiebung	107
4.4.2 Gravitationelle Lichtablenkung	108
Stichwort- und Namensverzeichnis	109

1. Mechanik

Die Kinematik als die reine Beschreibung von Bewegungen hat eine lange Geschichte. Schon **Aristoteles** (350 v. Chr.) legte dafür die Fundamente, indem er befand, dass ein Körper durch seinen Ort bestimmt ist. **Galilei** (1564–1642) gelang es den freien Fall zu beschreiben, **Kepler** (1571–1630) die Beschreibung der Planetenbewegung. Formulierte **Descartes** (1596–1650) die Impulserhaltung $m_1 v_{1a} + m_2 v_{2a} = m_1 v_{1e} + m_2 v_{2e}$ noch für die Beträge(!) der Geschwindigkeiten und sah die Masse als Erhaltungsgröße an, so konnten für **Huygens** (1629–1695) die Geschwindigkeiten sowohl positiv als auch negativ sein. Auch er beschränkte sich auf zentralelastische Stöße. Erst **Newton** (1643–1727) verhalf auch der Dynamik mit seinen Bewegungs- und Kraftgesetzen zu ihrem Durchbruch. Er behandelte die Geschwindigkeit als erster als *Vektor*, wie den Ort des Körpers selbst. Heute sind die wichtigsten Elemente der Kinematik

... der *Ortsvektor* $\vec{r} = \vec{r}(t)$

... der *Geschwindigkeitsvektor* $\vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$ und ...

... der *Beschleunigungsvektor* $\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t)$.

Die Kinematik kann dabei auch unphysikalische Bewegungen beschreiben.

1.1 Kinematik – Beschreibung der Bewegung

Die Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt$ lässt sich komponentenweise schreiben als

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad \text{und} \quad v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}.$$

Diese Gleichungen lassen sich integrieren, so dass umgekehrt aus der Geschwindigkeit der Ortsvektor folgt, z.B.

$$\begin{aligned} dx = v_x(t)dt &\Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^t v_x(t)dt \Rightarrow \\ x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t v_x(t)dt &\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v_x(t)dt. \end{aligned}$$

oder wieder in Vektorschreibweise

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t)dt.$$

Wir betrachten nun verschiedene Spezialfälle.

1. Die Bewegung geschieht ohne Richtungsänderung. Dann lässt sich der Ortsvektor schreiben als $\vec{r}(t) = \vec{e}_T r(t)$, wobei \vec{e}_T der (konstante) tangentielle Einheitsvektor entlang der Bewegung ist. Es gilt

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}(\vec{e}_T r(t)) = \vec{e}_T \frac{d}{dt}r(t) = \vec{e}_T v(t).$$

Der (vektorielle) Anfangsausdruck wird in der englischsprachigen Literatur als *velocity* bezeichnet, der letzte Ausdruck als (ungerichtete) *speed*.

2. Betrachten wir nun eine Bewegung entlang einer Bahnkurve mit Richtungsänderung, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \\ &= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right) \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \vec{e}_T v,\end{aligned}$$

wobei die *Bogenlänge* Δs im Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$ gegen die (ungerichtete) Ortsdifferenz geht. Nun hängt aber der *tangentiale Einheitsvektor* \vec{e}_T ebenfalls von der Zeit ab, so dass sich für die Beschleunigung ergibt

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d}{dt} (\vec{e}_T(t) v(t)) = v(t) \frac{d}{dt} \vec{e}_T(t) + \vec{e}_T(t) \frac{d}{dt} v(t).$$

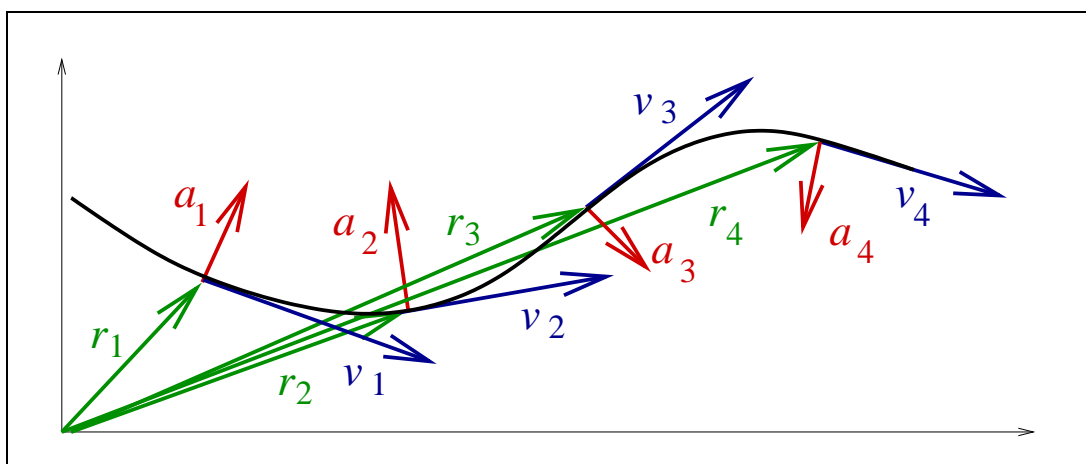


Abb. 1.1 Beschreibung einer allgemeinen Bewegung in der Ebene

3. Ist die Bewegung auf zwei Dimensionen beschränkt (beispielsweise x und y), so lässt sich die Ableitung des tangentialen Einheitsvektors $\vec{e}_T(t)$ in Richtung eines dazu senkrecht stehenden *normalen Einheitsvektors* \vec{e}_N beschreiben, denn aus $\vec{e}_T^2 = 1$ folgt

$$2\vec{e}_T \frac{d}{dt} \vec{e}_T = 0.$$

Dabei sei \vec{e}_N im Sinne eines Rechtssystems definiert, d.h. $\vec{e}_T \times \vec{e}_N$ zeigt in z -Richtung. Die beiden Einheitsvektoren definieren ein körperfestes Bezugssystem, das aus dem ursprünglichen System \vec{e}_x, \vec{e}_y durch Drehung um den Winkel φ hervorgeht,

$$\vec{e}_T = \vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi, \quad \vec{e}_N = -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi.$$

Bewegt sich der Körper ein infinitesimales Bogenstück ds vom Punkt R zum Punkt R' , wie in Abbildung 1.1 dargestellt, so lässt sich diese Bewegung mit der Drehwinkeländerung in Beziehung setzen, denn es gilt $ds = \rho d\varphi$, wobei ρ der aktuelle Krümmungsradius ist, also der Radius des Kreises um C , der die Bahnkurve annähert. Es ergibt sich

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = -\vec{e}_x \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \vec{e}_y \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \vec{e}_N \frac{d\varphi}{dt} = \vec{e}_N \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho} \vec{e}_N.$$

Die Beschleunigung ist somit

$$\vec{a} = \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_N + \frac{dv}{dt} \vec{e}_T.$$

Bewegt sich der Körper gleichförmig auf einem Kreis (also $v = \text{konstant}$, $\rho = \text{konstant}$), so gilt

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r} \vec{e}_N.$$

1.1.1 Galileisches Prinzip

Haben schon vorher aus den zwei Einheitsvektoren \vec{e}_T und \vec{e}_N ein körperfestes Bezugssystem definiert, so kann man eine Bewegung nicht nur vom ursprünglichen System, sondern von einem beliebigen (mit)bewegten System aus betrachten. In den wenigsten dieser Systeme aber läuft die Physik so ab, wie wir es gewohnt sind. Einzige Ausnahme sind sogenannte *Inertialsysteme*, die dem *Galileischen Prinzip* genügen (**Galileo Galilei**, italienischer Physiker, 1564–1642):

Galileisches Prinzip

Die grundlegenden Gesetze der Physik sind identisch in allen Bezugssystemen, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit gegeneinander bewegen.

Für die Geschwindigkeit im System S' gilt also $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$, wobei \vec{v} die Geschwindigkeit im System S und \vec{v}_0 ein konstanter Vektor ist, der die relative Geschwindigkeit von S' gegenüber S beschreibt. Es gilt $\vec{a}' = \vec{a}$, aber andersherum

$$\Delta \vec{r} = \int_0^t \frac{d\vec{r}}{dt'} dt' = \int_0^t \vec{v} dt' = \int_0^t \vec{v}' dt' + \vec{v}_0 \int_0^t dt' = \Delta \vec{r}' + \vec{v}_0 t.$$

Die Gleichung $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t$ wird als *Galileitransformation* bezeichnet. Man beachte, dass nicht die Galileitransformation, wohl aber das Galileische Prinzip die spezielle Relativitätstheorie überlebt hat und bis heute gilt.

1.1.2 Bewegungen in einem beschleunigten Bezugssystem

In einem beschleunigten, also nicht Inertialsystem treten Bewegungskomponenten auf, die sich am einfachsten auf die Wirkung von *Scheinkräften* zurückzuführen lassen, also *Kräften*, die nur in einem beschleunigten System auftreten. Dazu machen wir zwei Experimente und ein Gedankenexperiment:

1. Fallexperiment:

In gleichen Abständen von je einem Meter sind waagrecht Schnüre aufgespannt, die ein fallender Körper beim Fall aus einer Verankerung reißt und damit eine Zeituhr stoppt. Wir können so feststellen, dass die Zeit bis zur n -ten Schnur $t_n = \sqrt{nt_1}$ ist. Da aber zugleich $s_n = ns_1$ die zurückgelegte Wegstrecke ist, ergibt sich eine Bewegung $s \sim t^2$, die einer gleichmäßigen Beschleunigung entspricht. Diese wird ausgelöst durch die *Schwerkraft*. Doch ist diese eine Kraft oder eine Scheinkraft?

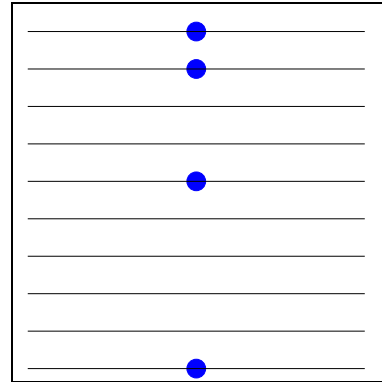


Abb. 1.2 Fallschnurexperiment

2. Frei fallendes Laboratorium:

Lassen wir einen geschlossenen Raum frei fallen, so fällt jeder Gegenstand in ihm in der gleichen Art, sogar die Luft in ihm. Von diesem Raum aus gesehen scheint es so, als ob alle Gegenstände ihr Gewicht verlören und schwerelos würden – einen Zustand, den man heute im Weltraum erleben kann. Einstein nutzte diesen Vergleich, um die Gleichheit von träger und schwerer Masse im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie zu erklären. Was ist hier die Scheinkraft?

3. Beschleunigungsmesser:

Ein Wagen, in dem sich eine Masse frei gleitend und an einer Feder befestigt bewegen kann, wird in Beschleunigung versetzt. Die Masse führt eine Bewegung in die andere Richtung aus, bis die Feder sie stoppt, denn sie bleibt hinter der immer schneller werdenden Bewegung des Wagens zurück. Das Gleichgewicht zwischen der auf die Masse wirkenden Scheinkraft und der *Federkraft* gibt ein Maß für die Beschleunigung an.

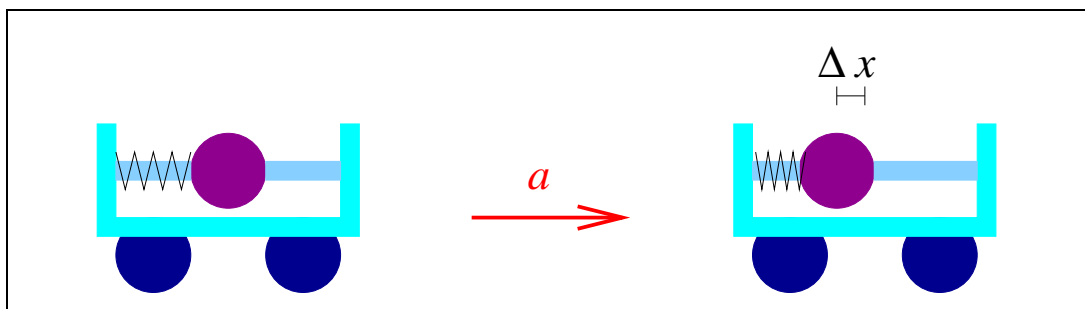


Abb. 1.3 Beschleunigungsmesser

1.1.3 Bewegung in einem rotierenden Bezugssystem

Himmelskörper, unter ihnen die Erde, drehen sich um eine Achse. Es ist daher naheliegend, Bewegungen in einem sich drehenden (d.h. rotierenden) Bezugssystem betrachten zu wollen. Bei der Drehung kreisen auf dem Himmelskörper festliegende Punkte in kreisförmigen Bahnen um die Drehachse.

Um die Bewegung auf einer Kreisbahn im dreidimensionalen Raum beschreiben zu können, definiert man die *Winkelgeschwindigkeit* $\vec{\omega}$. Der Betrag dieses Vektors beschreibt anschaulich, wie schnell sich ein Punkt um den Mittelpunkt des Kreises bewegt. Für Punkte, die in gleichen Zeitabständen gleiche Winkel zurücklegen, soll die gleiche Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r}$$

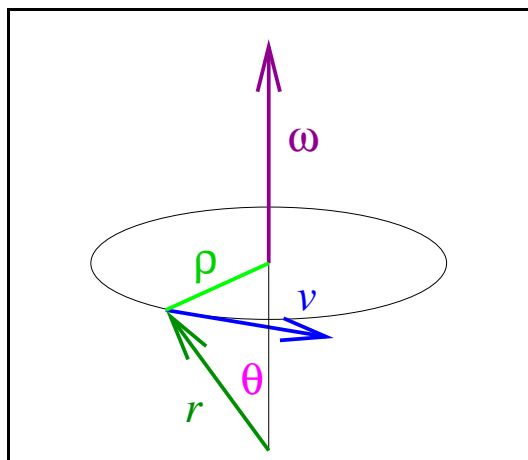


Abb. 1.4 Kreisbewegung im Raum

gegeben sein. Als Vektor im dreidimensionalen Raum zeigt die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ in Richtung der Drehachse entsprechend der Schrauben- oder Rechtestandregel. Damit verschiedene Punkte in gleichen Zeiten gleiche Winkel zurücklegen können, müssen äußere Punkte eine höhere Bahngeschwindigkeit aufweisen als innere Punkte. Diese ist also der Winkelgeschwindigkeit und dem Radius des Kreises proportional. Wird der Winkel in Bogenmaß gemessen, so ist der Proportionalitätsfaktor gleich 1. Als Vektoren geschrieben, gilt

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

denn die Geschwindigkeit steht senkrecht auf Ortsvektor \vec{r} und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, und der im Vektorprodukt auftretende Sinus des zwischen diesen beiden eingeschlossenen Winkels projiziert den Ortsvektor gerade auf den Krümmungsradius ρ .

1.1.4 Zentrifugal- und Corioliskraft

Wieder auf den Himmelskörper zurückkehrend, führen alle auf dem Himmelskörper festen Punkte von außen gesehen eine Drehung mit Winkelgeschwindigkeit ω durch, die je nach Ortsvektor \vec{r} zu einer Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ führt. Stellen wir den Ortsvektor in Koordinaten des Himmelskörpers dar, $\vec{r} = x'\vec{e}'_x + y'\vec{e}'_y + z'\vec{e}'_z$, so sind die Koordinaten x', y', z' eines festen Punktes auf dem Himmelskörper zeitlich konstant. Für die Geschwindigkeit in einem raumfesten Bezugssystem gilt aber

$$\vec{v} = x' \frac{d\vec{e}'_x}{dt} + y' \frac{d\vec{e}'_y}{dt} + z' \frac{d\vec{e}'_z}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Der Vergleich liefert dann für die Ableitungen der Einheitsvektoren

$$\frac{d\vec{e}'_x}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}'_x, \quad \frac{d\vec{e}'_y}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}'_y, \quad \frac{d\vec{e}'_z}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}'_z.$$

Nun betrachten wir eine Bewegung auf dem Himmelskörper, die (auf dem Himmelskörper selbst) durch die Geschwindigkeit

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{dx'}{dt'}\vec{e}'_x + \frac{dy'}{dt'}\vec{e}'_y + \frac{dz'}{dt'}\vec{e}'_z$$

beschrieben wird. Dabei haben wir gestrichene Größen für das System S' des Himmelskörpers gewählt, ungestrichene für das raumfeste Bezugssystem S (obwohl natürlich strenggenommen $t' = t$ ist). Betrachten wir dieselbe Bewegung nun vom System S aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (x'\vec{e}'_x + y'\vec{e}'_y + z'\vec{e}'_z) = \\ &= \frac{dx'}{dt}\vec{e}'_x + \frac{dy'}{dt}\vec{e}'_y + \frac{dz'}{dt}\vec{e}'_z + x'\frac{d\vec{e}'_x}{dt} + y'\frac{d\vec{e}'_y}{dt} + z'\frac{d\vec{e}'_z}{dt} = \\ &= \frac{dx'}{dt'}\vec{e}'_x + \frac{dy'}{dt'}\vec{e}'_y + \frac{dz'}{dt'}\vec{e}'_z + x'(\vec{\omega} \times \vec{e}'_x) + y'(\vec{\omega} \times \vec{e}'_y) + z'(\vec{\omega} \times \vec{e}'_z) = \\ &= \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}. \end{aligned}$$

Entsprechend gilt aber auch

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}'}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx'}{dt'}\vec{e}'_x + \frac{dy'}{dt'}\vec{e}'_y + \frac{dz'}{dt'}\vec{e}'_z \right) = \frac{d^2x'}{dt'^2}\vec{e}'_x + \frac{d^2y'}{dt'^2}\vec{e}'_y + \frac{d^2z'}{dt'^2}\vec{e}'_z + \\ &+ \frac{dx'}{dt'}(\vec{\omega} \times \vec{e}'_x) + \frac{dy'}{dt'}(\vec{\omega} \times \vec{e}'_y) + \frac{dz'}{dt'}(\vec{\omega} \times \vec{e}'_z) = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'. \end{aligned}$$

Auf diesen Ergebnissen aufbauend, kann man auch die Beschleunigung im raumfesten Bezugssystem S bestimmen,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \\ &= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \end{aligned}$$

Umgestellt ergibt sich

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Zur Beschleunigung \vec{a} tritt auf dem Himmelskörper die *Zentrifugalbeschleunigung* $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) + \vec{\omega}^2 \vec{r}$ sowie die vom französischen Mathematiker und Physiker **Gaspard Gustave de Coriolis** (1792–1843) gefundene und nach ihm benannte *Coriolisbeschleunigung* $-2\vec{\omega} \times \vec{v}'$.

1.2 Dynamik – Die Newtonschen Sätze

Unser heutiges (klassisches) Verständnis der Kinematik und Dynamik beruht auf den drei Newtonschen Sätzen (**Sir Isaac Newton**, britischer Physiker, 1643–1727). Diese sind:

- I Ein Körper, auf den keine äußeren Kräfte wirken, verharrt in Ruhe oder im Zustand gleichförmiger Bewegung.
- II Die zeitliche Änderung des *Impulses* eines Körpers, definiert als $m\vec{v}$, ist gleich der Summe der auf ihn wirkenden *Kräfte*,

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad (1.1)$$

(für konstante Masse gilt $\vec{F} = m\vec{a}$).

- III Die Kraft, die ein Körper auf einen anderen ausübt, ist gleich, aber entgegengerichtet der Kraft, die dieser Körper auf den ersten ausübt (dieser 3. Newtonsche Satz läuft unter dem lateinischen Namen *actio = reactio*).

Newton ging bei seinen Sätzen vom Konzept des *absoluten Raumes* aus. Dieses Konzept wurde erst durch Einsteins spezielle Relativitätstheorie in Frage gestellt, auf die wir am Schluss der Vorlesungsreihe zu sprechen kommen. Wie stehen nun die Größen, die im zweiten Newtonschen Satz angesprochen sind, miteinander in Verbindung? Grundsätzlich muss man zunächst davon ausgehen, dass alle Größen von der gesamten Kinematik abhängen können, dass also gilt

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, t) = \frac{d}{dt} \left(m(\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, t) \vec{v}(\vec{r}, \vec{a}, t) \right).$$

Der Wunsch ist, dass diese Abhängigkeit wieder auf ein „vernünftiges“ Maß reduziert wird, d.h. m konstant, $\vec{v} = \vec{v}(t)$ und $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$, wobei die Kraft nach Möglichkeit auch nicht (explizit) von der Geschwindigkeit und der Zeit abhängen sollte. Befassen wir uns also näher mit der Bewegungsbeschreibung.

1.2.1 Zentralkräfte

Soll sich ein Körper gleichförmig auf einer Kreisbahn bewegen, so muss auf ihn eine Kraft in Richtung Kreismittelpunkt vom Betrag $m_t v^2/r$ wirken, wobei m_t die *träge Masse* des Körpers ist. Nach heutigem Wissensstand sind alle vier elementaren Kräfte *Zentralkräfte*, wirken also entlang des Verbindungsvektors $\vec{r}_{12} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Diese sind

1. Die *Gravitationswechselwirkung*

$$\vec{F}_{G12} = -\frac{Gm_{s1}m_{s2}}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} = m_{t2}\vec{a}_2 = -m_{t1}\vec{a}_1 = -\vec{F}_{G21}.$$

Dabei sind m_{s1} und m_{s2} die *schweren Massen* der beiden aufeinander gravitativ wirkenden Körper, wobei man i.a. $m_{s1} \gg m_{s2}$ annimmt, weswegen

sich der Zentralkörper praktisch nicht bewegt. Die Reichweite der Gravitationswechselwirkung ist unendlich. Sie wirkt auf die schwere Masse der Körper (betrifft also alle schweren Körper), und ihre Stärke wird durch die *Gravitationskonstante* $G = 6.67384(80) \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ bestimmt.

2. Die *Coulombwechselwirkung*

$$\vec{F}_{C12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^3} \vec{r}_{12} = m_{t2} \vec{a}_2 = -m_{t1} \vec{a}_1 = -\vec{F}_{C21}.$$

Die Reichweite dieser Kraft ist ebenfalls unendlich, sie gilt aber nur für elektrisch geladene Körper mit *elektrischen Ladungen* Q_1 und Q_2 .

3. Die schwache Wechselwirkung besitzt einer Reichweite von rund 10^{-13} m , die „Ladung“ wird als *flavor* bezeichnet (auf deutsch so etwas wie Geschmack oder Geruch). Sie betrifft Leptonen und Hadronen.

4. Die *starke Wechselwirkung* besitzt ebenfalls eine Reichweite von $\sim 10^{-13} \text{ m}$, ihre „Ladung“ ist als *color* (Farbe) bekannt. Sie betrifft nur Hadronen.

Wir werden uns im Folgenden nur mit der Gravitationswechselwirkung beschäftigen, auf der Erde gemessen auch als Schwerkraft bezeichnet.

1.2.2 Das Experiment von Cavendish

Selbst unter der Annahme, dass die schwere Masse gleich der trägen Masse ist (dazu später mehr), kann man als Beobachter auf der Erde die Gravitationskonstante nicht durch Messungen der Erdschwerkraft, sondern nur durch ein Präzisionsexperiment mit bekannten Massen bestimmen, da sonst G immer nur zusammen mit der (unbekannten) Erdmasse auftaucht. Der britische Wissenschaftler **Henry Cavendish** (1731-1810) führte 1797/98 dazu ein Experiment durch, das der Geologe **John Michell** (1724–1793) vorgeschlagen, aber selbst nicht mehr durchgeführt hatte. Es ist schematisch in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.

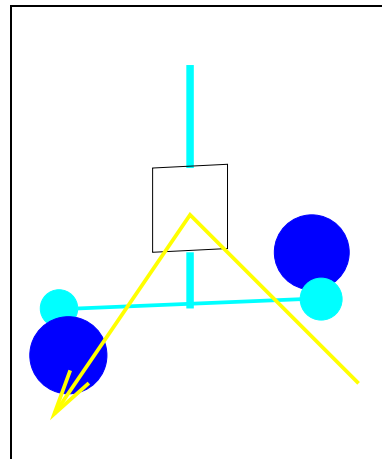


Abb. 1.5 Das Cavendish-Experiment

Die kleinen Kugeln sind verbunden durch ein Gestänge, auf welchem ein Spiegel sitzt, welches vertikal an einem Draht aufgehängt ist. Werden nun an diese beiden kleinen Kugeln in gleicher Richtung große Kugeln ebenfalls bekannter Masse horizontal herangeführt, so werden die kleinen Kugeln von diesen angezogen. Die Folge ist, dass sich die Apparatur dreht, der Draht sich geringfügig verdrillt und ab einer bestimmten Auslenkung diese (winzige) Kraft zu kompensieren versteht. Ein möglichst gebündelter Lichtstrahl (heute wohl eher ein Laserstrahl) reflektiert am Spiegel und trifft als Lichtpunkt auf die Innenwand der Apparatur. Aus seiner Ablenkung lässt sich dann auf die Größe der Gravitationswechselwirkung und mithin auf die Gravitationskonstante schließen.

Cavendish war beileibe nicht der einzige, der die von Michell erfundene Dreh- oder Torsionswaage benutzte. Wir werden ihr gleich noch einmal begegnen. Und Cavendish war wie viele andere auch überzeugt, dass er nicht die Gravitationskonstante, sondern die Dichte der Erde bestimmte. Dies lag an der früher anderen Beschreibung der Gravitation. Jedenfalls liefert seine Messung der Gravitationskonstanten einen überraschend aktuellen Wert von $6.74 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^3$, der nur um 1% vom heutigen Wert abweicht.

1.2.3 Das Experiment von Eötvös

Das Experiment, mit deren Hilfe der ungarische Physiker **Loránd Eötvös** (1848–1919) ab dem Jahre 1885 die Gleichheit von träger und schwerer Masse nachzuweisen versuchte, gründet sich ebenfalls auf der Drehwaage. In diesem Fall sind an den beiden Enden unterschiedliche Massen (aus verschiedenen Materialien) angebracht. Die Waage ist aber ins Gleichgewicht gebracht.

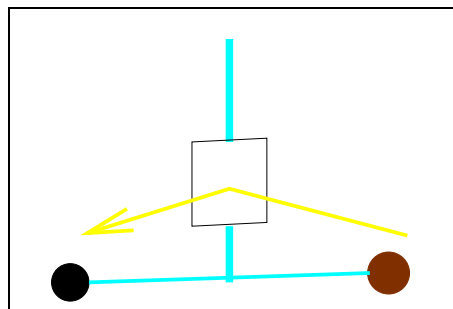


Abb. 1.6 Das Eötvös-Experiment

Auf jede der beiden Kugeln wirkt nun in verschiedenen Richtungen je die (von der trägen Masse abhängige) Zentrifugalkraft und die (von der schweren Masse abhängige) Schwerkraft. Ist die schwere Masse gleich der trägen Masse, so sind die Kräfte im Gleichgewicht, und die Apparatur verdrillt sich nicht. Ist dies Gleichheit aber nicht gegeben, so sollte eine Verdrillung festzustellen sein, erneut über die Reflexion am Spiegel. Das Experiment erbrachte mit einer Genauigkeit von 10^{-8} die Gleichheit von träger und schwerer Masse, eine Neumessung durch Dicke im Jahre 1964 lieferte eine Genauigkeit von 10^{-11} (P.G. Roll, R. Krotkov und R.H. Dicke, *Annals Phys.* **26** (1964) 442).

1.2.4 Die Alwoodsche Fallmaschine

Auf den englischen Mathematiker **George Atwood** (1745–1807) geht eine Versuchsanordnung zurück, mit deren Hilfe sich auch kleinste Beschleunigungen messen lassen. Über eine im idealen Falle masselose und leichtgängige Rolle sind zwei gleichgroße Massen durch ein Seil miteinander verbunden. Fügt man der einen der Massen eine kleine Zusatzmasse hinzu, so erfährt diese Zusatzmasse die Schwerkraft, wird also als schwere Masse gemessen. Da jedoch die zwei gleichgroßen Massen zusammen mit der kleinen Zusatzmasse die träge Masse bilden, ist die Beschleunigung stark verlangsamt und kann so leicht beobachtet werden.

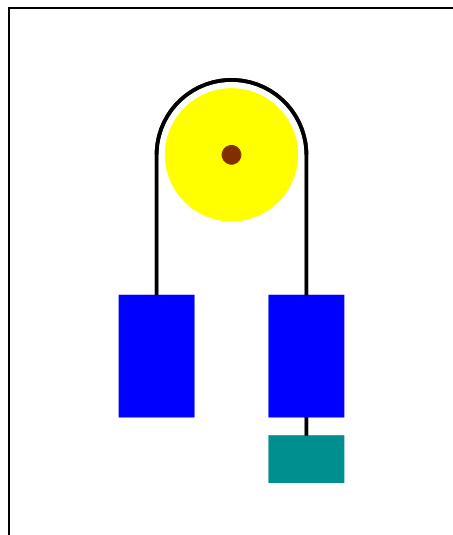


Abb. 1.7 Atwoodsche Fallmaschine

Betrachten wir die Situation mit zwei verschiedenen Massen m_1 und m_2 , so

treten diese über die *Seilspannung* F nach Newton in ein Kräftegleichgewicht,

$$F - m_2g = -m_2a, \quad F - m_1g = m_1a.$$

Dabei ist g die Erdbeschleunigung (siehe unten). Wir erhalten

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g, \quad F = 2\mu g \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}.$$

Das zweifache der Seilspannung wirkt auf die Rolle und kann an einer Federwaage abgelesen werden, an der die Rolle hängt. μ ist die *reduzierte Masse*. Sie ist definiert durch die Summe der Kehrwerte,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1m_2}$$

und ist stets kleiner als jede einzelne der Massen. Im Spezialfall $m_2 = 2m_1$ erhalten wir $\mu = \frac{2}{3}m_1$. Auf der Federwaage lesen wir eine Kraft von $\frac{8}{3}m_1g$ ab, die Apparatur in Ruhe würde aber $3m_1g$ wiegen. Die Differenz macht die Kraft $\frac{1}{3}m_1g$ aus, um welche die Apparatur beschleunigt wird.

1.2.5 Fall über die Tischkante

Eine andere Versuchsanordnung zur Messung der Erdbeschleunigung ist in der nebenstehenden Abbildung zu sehen. Aufgrund der Kräftebilanz

$$F = m_1a, \quad F - m_1g = -m_2a$$

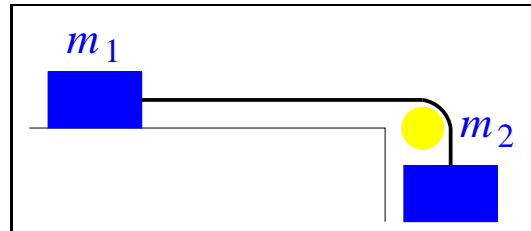


Abb. 1.8 Fall über die Tischkante

ist die Beschleunigung $a = m_2g/(m_1 + m_2)$. Durch Integration der konstanten Beschleunigung ergibt sich

$$\int_{t_0}^t a dt = \int_{t_0}^t \frac{dv}{dt} dt = \int_{v_0}^v dv \quad \Rightarrow \quad a(t - t_0) = v - v_0.$$

Durch abermalige Integration von $v = a(t - t_0) + v_0$ erhält man

$$\int_{t_0}^t (a(t - t_0) + v_0) dt = \int_{t_0}^t v dt = \int_{t_0}^t \frac{ds}{dt} dt = \int_{s_0}^s ds$$

und damit

$$s = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0.$$

Setzen wir als Startbedingungen $t_0 = s_0 = v_0 = 0$, so ist $s = at^2/2$. Dies benutzen wir, um aus einer Fallhöhe von $s = 2m$ und der gemessenen Zeit auf die Beschleunigung schließen zu können (Erdbeschleunigung $g = 9.81m/s^2$).

m_1 [kg]	m_2 [kg]	a_{th} [m/s^2]	t_{exp} [s]	a_{exp} [m/s^2]
0.218	0.020	0.82	2.27	0.78
0.218	0.040	1.52	1.64	1.48
0.436	0.040	0.82	2.21	0.82
0.436	0.020	0.43	3.13	0.41

1.3 Experimente zur Newtonschen Mechanik

Um uns etwas in der Newtonschen Mechanik zu üben, führen wir eine Reihe von einfachen Experimenten durch, die allesamt mit Kräftegleichgewichten zu tun haben.

1.3.1 Versuch zum Impulssatz

Zwei Körper der Massen m_1 und m_2 , zwischen denen eine Feder eingeklemmt ist, sind durch einen Faden miteinander verbunden. Es gilt das Kräftegleichgewicht

$$F_{12} + F_{21} = 0,$$

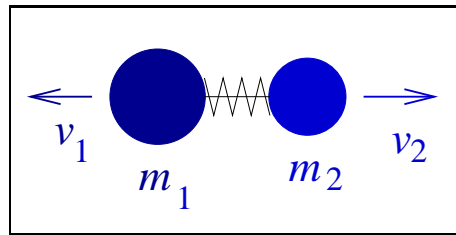


Abb. 1.9 Versuch zum Impulssatz

Nun wird der Faden durchgebrannt.* Die beiden Körper entfernen sich mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 voneinander. Das Kräftegleichgewicht lässt sich umschreiben in

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_1) + \frac{d}{dt}(m_2 v_2) = \frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2) = 0$$

und damit $m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{konstant}$. Da die Bewegung aus der Ruhe heraus erfolgte ($v_1(0) = v_2(0) = 0$), ist $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$ und damit

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{m_1}{m_2}.$$

1.3.2 Versuch zur schiefen Ebene

Auf der schiefen Ebene mit Neigungswinkel θ wird die Schwerkraft F zerlegt in eine Komponente $F_T = mg \sin \theta$ parallel zur Ebene und eine Komponente F_N senkrecht dazu. Nur die Komponente parallel zur Ebene bewirkt eine Beschleunigung.

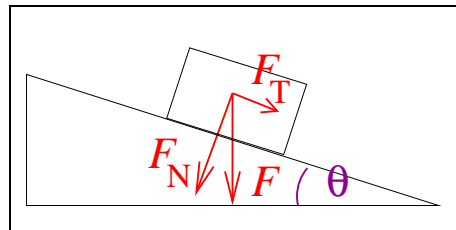


Abb. 1.10 Versuch zur schiefen Ebene

Der Winkel θ bestimmt sich vor dem Versuch aus der Höhe $h = 0.0318\text{m}$ des Anfangspunktes der Ebene und der Länge $l = 3.81\text{m}$ der Basis,

$$\theta \approx \sin \theta = \frac{h}{l} = \frac{0.0318}{3.81} = 8.346 \times 10^{-3}.$$

Die Beschleunigung ist $a = g \sin \theta$, die Wegstrecke $s = at^2/2$, also umgekehrt die Beschleunigung $a = 2s/t^2$. Die theoretisch bestimmte Beschleunigung $a_{\text{th}} = 8.2 \times 10^{-2} \text{m/s}^2$ wird mit der gemessenen Beschleunigung verglichen.

* Ich erinnere mich noch an die Chefassistentin mit rauher Stimme, die mit einer Zigarette den Faden durchbrannte.

m [kg]	s [m]	t [s]	a_{exp} [m/s^2]
0.4216	1.0	4.9/4.8	8.5×10^{-2}
0.4216	4.0	9.9	8.16×10^{-2}
0.2108	1.0	4.9	8.33×10^{-2}
0.2108	4.0	10.0	8.0×10^{-2}

Abweichungen wegen
des Luftwiderstandes

Besitzt der Wagen eine Länge $\Delta s = 0.12m$, so kann aus der Zeitspanne Δt , während der eine Lichtschranke unterbrochen ist, auf die Endgeschwindigkeit $\bar{v}_{\text{exp}}(s) = \Delta s / \Delta t$ geschlossen werden. Der theoretische Ausdruck für die Endgeschwindigkeit ist $v_{\text{th}} = \sqrt{2sa}$. Für $s = 1m$ erhält man $0.404m/s$, für $s = 4m$ den zweifachen Wert $0.808m/s$. Experimentell erhalten wir aber

$$\bar{v}_{\text{exp}}(1) = \frac{0.12m}{0.29s} = 0.41m/s, \quad \bar{v}_{\text{exp}}(4) = \frac{0.12m}{0.13s} = 0.9m/s.$$

1.3.3 Liegender Flaschenzug

Die Masse m_1 wird von der Masse m_2 über die nebenstehende Apparatur gezogen. Ist a die Beschleunigung, die m_2 erfährt, so gilt zunächst

$$F - m_2g = -m_2a.$$

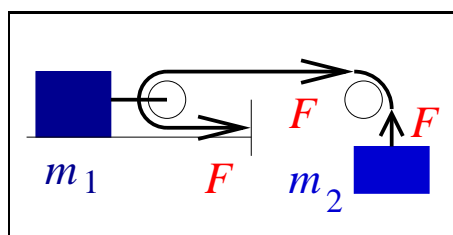


Abb. 1.11 Liegender Flaschenzug

Die Masse m_1 bewegt sich nur halb so schnell, aber auf sie wirkt zugleich die doppelte Seilspannung. Es gilt also

$$2F = m_1 \frac{a}{2} \Rightarrow a = \frac{m_2g}{m_2 + m_1/4}.$$

Beachte, dass die Gleichung $m_2g = m_2a + m_1a/2$ aus einer vereinfachten Überlegung falsch ist, da an der Rolle nur die halbe Kraft auftritt. Diese Prozess lässt sich besser mit dem Energiesatz rechnen.

1.3.4 Das zerrissene Seil

An der Decke ist an einem Seil eine Masse m aufgehängt. Das Seil ist unterhalb der Masse fortgesetzt und endet in einem „masselosen“ Griff. Frage ist, welches Seil bei einer plötzlichen Kraftausübung schneller reißt. Für das Kräftegleichgewicht erhalten wir

$$F + mg - F_O = ma \quad \text{und} \quad F = F_U.$$

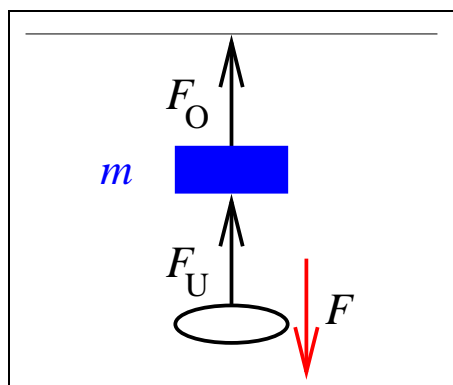


Abb. 1.12 Das zerrissene Seil

Wir erhalten $F_O - F_U = m(g - b)$. Ist nun $a < g$, so folgt $F_U < F_O$, das Seil reißt eher oben. Für $a > g$ aber ist $F_U > F_O$, das Seil reißt eher unten.

1.4 Auswirkungen der Erdbewegung

Die klassische Mechanik geht von den folgenden Grundannahmen aus:

1. Der Raum ist euklidisch (d.h. Parallelen schneiden sich nicht)
2. Der Raum ist homogen und isotrop (überall und in allen Richtungen gleich)
3. Alle Newtonschen Gesetze gelten auf der Erde, wenn man die Erdbewegung (Erddrehung) und die Relativbewegung zwischen Sonne und Erde (Umlauf um die Sonne) korrigiert.

Bevor wir hier nun Kinematik und Dynamik in diesem Sinne verquicken und aus den ersten beiden Grundannahmen Erhaltungssätze herleiten, wollen wir uns überlegen, welchen Effekt die in Punkt 3 genannten Bewegungen auf die Physik auf der Erde haben.

1.4.1 Die Zentrifugalbeschleunigung

Die Geschwindigkeit eines ruhenden Körpers wird auch durch die Scheinkräfte nicht vom Wert $\vec{v} = \vec{0}$ fortbewegt. Dagegen ist die aus der Zentrifugalbeschleunigung und der Gravitationswirkung resultierende Beschleunigung gegeben als

$$\vec{b} = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Ist λ der Breitengrad, so erhält man $|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin(90^\circ - \lambda) = \omega r \cos \lambda$ und

$$|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| = \omega^2 r \cos \lambda.$$

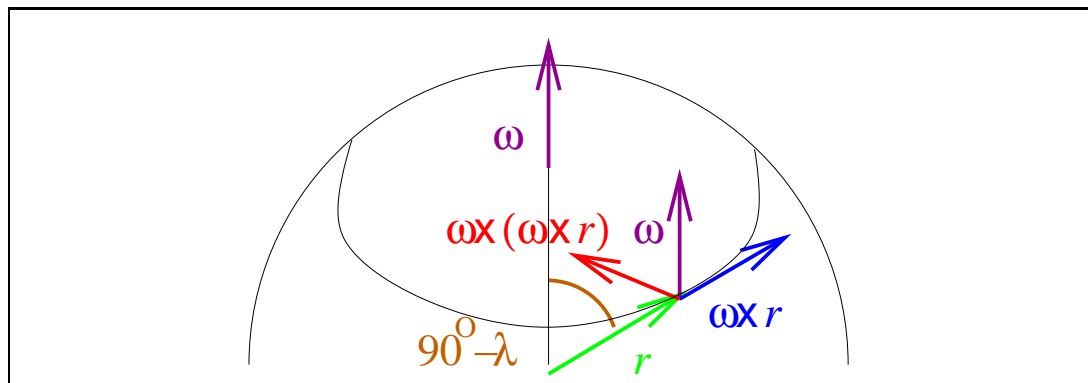


Abb. 1.13 Zentrifugalkraft aufgrund der Erddrehung

Wie die obenstehende Abbildung zeigt, in der die Drehachse der Erde nach oben und der Radialvektor vom Erdmittelpunkt fort gerichtet ist, zeigt der Vektor $\vec{\omega} \times \vec{r}$ aus der Ebene heraus. Erneut mit dem Vektor $\vec{\omega}$ multipliziert, zeigt $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ dann vom Ort des Körpers nach links. In Bezug auf die Senkrechte relativ zur Erdoberfläche gemessen, welche die Richtung der Gravitationsbeschleunigung kennzeichnet, ergeben sich so die zwei Komponenten

$$b_{\parallel} = g_0 - \omega^2 r \cos^2 \lambda, \quad b_{\perp} = \omega^2 r \cos \lambda \sin \lambda,$$

wobei die Parallelkomponente zum Erdmittelpunkt, die Senkrechtkomponente aber auf der Nordhalbkugel nach Süden, auf der Südhalbkugel nach Norden gerichtet ist. Aus beiden Komponenten setzt sich eine gemessene „vertikale“ Gravitationsbeschleunigung zusammen, die um den Winkel α mit

$$\tan \alpha = \frac{\omega^2 r \cos \lambda \sin \lambda}{g_0 - \omega^2 r \cos^2 \lambda} \approx 3.4 \cdot 10^{-3} \sin \lambda \cos \lambda$$

gegenüber der tatsächlichen Vertikalen geneigt ist (vgl. Abb. 1.13 rechts). Wir können uns fragen, wie groß die Ablenkung eines frei fallenden Körpers gegenüber der Vertikalen ist. Aus $x = \frac{1}{2} b_{\perp} t^2$ und $h = \frac{1}{2} g t^2$ ergibt sich mit den realistischen Vorgaben $\omega = 2\pi/T = 7.2722 \cdot 10^{-5} s^{-1}$, $r_E = 6.4 \cdot 10^6 m$, $\lambda = 50^\circ$, $h = 100m$ und $g = 9.81m/s^2$ ein Wert in Südrichtung von

$$x = \frac{b_{\perp} h}{g} = \frac{\omega^2 r h}{g} \sin \lambda \cos \lambda = 0.170m.$$

1.4.2 Die Coriolisbeschleunigung

In der nebenstehenden Abbildung ist die Abweichung aufgrund der Zentrifugalkraft in Nord-Süd-Richtung zusammen mit einer weiteren (in West-Ost-Richtung) zu sehen, welche durch die Coriolisbeschleunigung

$$\vec{b} = -2(\vec{\omega} \times \vec{v})$$

hervorgerufen wird. Ist \vec{v} vertikal nach unten gerichtet wie beim freien Fall, so ergibt sich mit $v = gt$

$$b = \frac{d^2 x}{dt^2} = 2\omega v \cos \lambda = 2\omega g t \cos \lambda$$

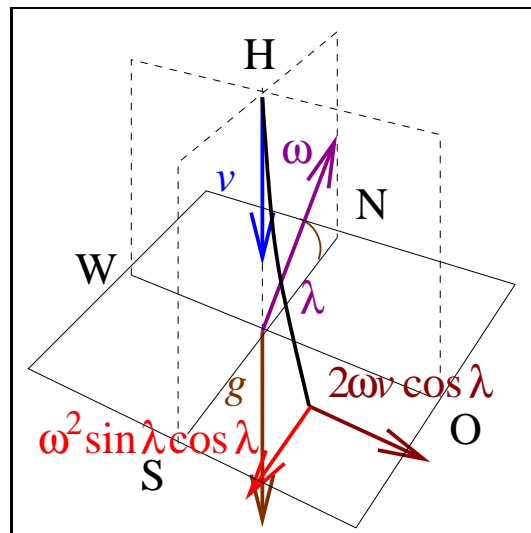


Abb. 1.14 ... und Corioliskraft

und daraus $x = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \lambda$ in West-Ost-Richtung. Bezogen auf die Höhe $h = \frac{1}{2} g t^2$ erhält man

$$x = \frac{1}{3} \omega g \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2} \cos \lambda = \frac{1}{3} \left(\frac{8\omega^2 h^3}{g} \right)^{1/2} \cos \lambda.$$

Für erneut $\lambda = 50^\circ$ und $h = 100m$ erhält man $x = 0.01m$.
(Frage: bei welcher Höhe sind beide Ablenkungen gleich?)

1.4.3 Das Foucaultsche Pendel

Im Jahre 1851 wies der französische Physiker **Léon Foucault** (1819–1868) mit einem in Keller seines Hauses aufgehängten Pendel nach, dass sich die Erde dreht.

Das nach ihm benannte Pendel bewegt sich dabei langsam aus der Schwingungsebene heraus und vollführt eine Bewegung, die (übertrieben dargestellt) in Abbildung 1.15 zu sehen ist. Wie kommt es zu der Drehung und wovon hängt sie ab? Um dies zu verstehen, betrachten wir in Nord–Süd-Richtung drei Punkte der Unterlage, über welcher das Pendel schwingt. Ist λ der geographische Breitengrad, so bewegt sich der Mittelpunkt der Schwingung aufgrund der Erddrehung mit Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T_0$ ($T_0 = 24h$ ist die Umdrehungszeit der Erde) mit der Geschwindigkeit

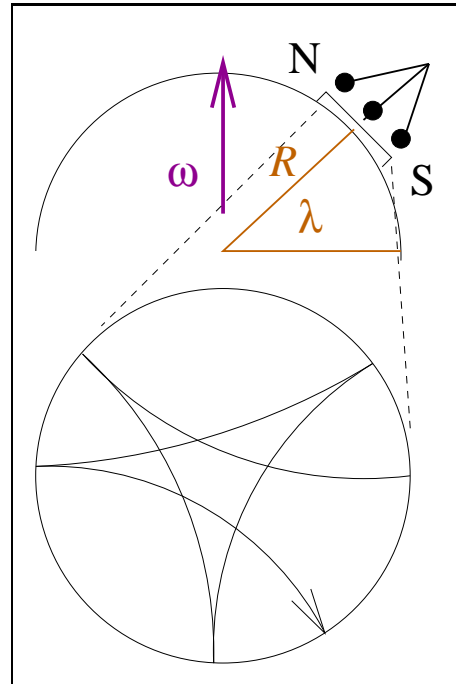


Abb. 1.15 Das Foucaultsche Pendel

$$v_z = \omega_0 R \cos \lambda$$

in östliche Richtung, wobei R der Erdradius ist. Dies ist leicht zu erklären, denn $R \cos \lambda$ ist der Abstand des Punktes zur Erdachse. Im folgenden nehmen wir an, dass $0 < \lambda < 90^\circ$ ist, dass sich das Pendel also auf der Nordhalbkugel befindet. Der um den Radius r der (als scheibenförmig angenommenen) Unterlage weiter nördlich liegende Punkt aber besitzt, wie sich leicht zeigen lässt, einen verminderten Abstand $R \cos \lambda - r \sin \lambda$, während der Abstand des weiter südlich gelegenen Punktes den Abstand $R \cos \lambda + r \sin \lambda$ zur Erdachse hat. Die Geschwindigkeiten dieser beiden Punkte sind also

$$v_N = \omega_0 R \cos \lambda - \omega r \sin \lambda, \quad v_S = \omega_0 R \cos \lambda + \omega r \sin \lambda.$$

Die Differenz der beiden Geschwindigkeiten bewirkt, dass sich die Unterlage bezüglich des leeren Raumes (und auch des reibungsfrei aufgehängten Pendels) im Uhrzeigersinn dreht mit einer Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{v_N - v_S}{2r} = \omega_0 \sin \lambda.$$

Für die Zeit des einmaligen Umlaufs der Schwingungsebene ergibt sich andererseits $T = 2\pi/\omega = 2\pi/(\omega_0 \sin \lambda) = T_0/\sin \lambda$. Bei einer geographischen Breite von $\lambda = 50^\circ$ sind das etwa 33 Stunden, im Vergleich zu den 24 Stunden des Tages. Am Nordpol dreht sich die Unterlage in 24 Stunden und bleibt damit raumfest, am Äquator dreht sie sich überhaupt nicht.

1.5 Die Erhaltungsgesetze

Auch wenn die Bewegung eines Systems aus zwei oder mehr Körpern bereits ein sehr komplexes Verhalten aufweisen kann, so gelten auch in diesem Fall bestimmte Prinzipien, die unter dem Namen Erhaltungsgesetze bekannt sind. Gängige Erhaltungsgrößen sind Impuls, Drehimpuls und Energie. Im Folgenden wollen wir versuchen, unter Verwendung der drei Newtonschen Gesetze diese Erhaltungssätze herzuleiten. Ausgangspunkt ist dabei das zweite Newtonsche Gesetz in seiner durch Gleichung (1.1) gegebenen Form.

1.5.1 Der Impulssatz

Betrachten wir zunächst ein einzelnes Teilchen, auf das keine Kraft wirkt, d.h. für das $\vec{F} = \vec{0}$ ist. Dann lässt sich dieser Vektor über die Zeit integrieren und liefert eine Konstante, die als Kraftstoß \vec{J} (engl. *impulse*) bezeichnet wird. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz ist aber

$$\vec{J}(t) = \int_0^t \vec{F} dt = \int_0^t \frac{d}{dt}(m\vec{v}) dt = m\vec{v}(t)$$

Ist der Kraftstoß konstant, so ist auch die rechte Seite, nämlich der *Impuls* (engl. *momentum*) konstant und folglich erhalten. Betrachten wir nun zwei Teilchen, die miteinander wechselwirken, auf die aber erneut keine äußere Kraft wirkt. Dann sagt das dritte Newtonsche Gesetz aus, dass $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ist, also

$$\vec{F}_{12} = \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1) = -\frac{d}{dt}(m_2\vec{v}_2) = -\vec{F}_{21}.$$

Wir erhalten daraus durch Umstellung

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \vec{0}$$

oder die Konstanz des *Gesamtimpulses* $\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. Diese Überlegungen lassen sich auf beliebig viele wechselwirkende Teilchen ausdehnen, da immer $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ ist. Dies gilt unabhängig von der Natur der Wechselwirkung. Es gilt also der ...

Impulssatz:

Der Gesamtimpuls \vec{p} eines Systems miteinander wechselwirkender Teilchen, auf das keine äußere Kraft wirkt, ist eine Erhaltungsgröße.

Nach der deutsche Mathematikerin **Emmy Noether** (1882–1935) ist ein Erhaltungssatz Zeichen einer Symmetrie, in diesem Fall der Homogenität des Raumes. Wir betrachten zur Veranschaulichung nun drei Beispiele für inelastische Stöße, bei denen die stoßenden Körper nach dem Stoß verbunden bleiben. Dabei beschränken wir uns auf den eindimensionalen Fall.

- a. Als erstes Beispiel betrachten wir zwei gleichschwere Körper mit entgegengesetzt gerichteten gleichgroßen Geschwindigkeiten $v_1 = v$ (nach „rechts“) und $v_2 = -v$ (nach „links“). Nach dem Stoß verbleibt das System in Ruhe, hat also die Geschwindigkeit $v_e = 0$. Dies entspricht dem Impulssatz, denn

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = mv - mv = 0 = 2mv_e.$$

Versetzen wir uns in das System des ersten Körpers, so bewegt sich der zweite Körper mit der Geschwindigkeit $-2v$ auf diesen zu. Nach dem Stoß aber bewegen sich beide Körper mit der Geschwindigkeit $-v$. Wieder gilt der Impulssatz,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m \cdot 0 - m(2v) = -2mv = -2mv_e.$$

- b. Beim nächsten Beispiel seien wieder die Massen gleich, die Geschwindigkeit des linken Körpers sei aber kleiner als die des rechten. Nach dem Stoß bewegt sich das verbundene System mit der Geschwindigkeit $(v_2 - v_1)/2$ nach links, denn es gilt

$$|m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2| = m|v_1 - v_2| = 2m \frac{v_2 - v_1}{2} = 2mv_e.$$

Setzen wir uns wieder auf den linken Körper, so bewegt sich der andere Körper mit der Geschwindigkeit $v_1 + v_2$ auf uns zu, nach dem Stoß bewegen wir uns aber gemeinsam mit der Geschwindigkeit $(v_1 + v_2)/2$ nach links. Wieder gilt

$$m \cdot 0 - m(v_1 + v_2) = -2m \frac{v_1 + v_2}{2} = 2mv_e.$$

- c. Nun seien sowohl die Massen als auch die Geschwindigkeiten unterschiedlich. Betrachten wir beispielsweise den Fall $m_1 = 2m$ und $m_2 = m$, aber Geschwindigkeiten $v_1 = v/2$ und $v_2 = v$, so kommt das System nach dem Stoß zur Ruhe, denn

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = mv - mv = 0.$$

Man kann sich zur Veranschaulichung den linken Körper der doppelten Masse mit seiner halben Geschwindigkeit als resultierend aus dem Zusammenstoß eines ruhenden Körpers der Masse m und eines von links kommenden Körpers derselben Masse, aber der Geschwindigkeit v vorstellen, so wie es im ersten Beispiel für das körperfeste System berechnet wurde. Dann lässt sich das System aufteilen in drei Körper gleicher Masse m , von denen der mittlere in Ruhe ist, während sich die anderen beiden mit derselben Geschwindigkeit v von beiden Seiten auf ihn zubewegen. Dieses System findet klarerweise zur Ruhe, egal ob die Stöße nun nacheinander erfolgen oder zur selben Zeit.

1.5.2 Der Drehimpulssatz

Kräfte zwischen einzelnen Teilchen sind stets Zentralkräfte, d.h. sie wirken entlang der Verbindungslinie dieser Teilchen. Nehmen wir dies auch von äußeren Kräften an, so erhalten wir eine weitere Erhaltungsgröße, den Drehimpuls. Legen wir die äußere Zentralkraft in den Ursprung eines Inertialsystemes, so gilt stets $\vec{F} \parallel \vec{r}$ und damit

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0},$$

da das Vektorprodukt zweier paralleler Vektoren Null ergibt. Umgekehrt ist aber

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

und damit

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{0}.$$

Für Zentralkräfte gilt also, dass der *Drehimpuls* $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$ eine Erhaltungsgröße ist. Im anderen Fall ist die zeitliche Änderung des Drehimpulses das *Drehmoment*

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Ein Drehmoment besitzt also Kraftkomponenten, die senkrecht auf der Verbindungslinie zum Kraftzentrum stehen. Der Drehimpuls ist erhalten, wenn (a) keine Kraft auf das Teilchen ausgeübt wird, oder wenn (b) die ausübende Kraft eine Zentralkraft ist. Betrachten wir nun aber ein System von wechselwirkenden Teilchen ohne äußere Krafteinwirkung. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji},$$

wobei die Impulsänderung des i -ten Teilchens durch die Summe $\sum_j \vec{F}_{ji}$ der auf dieses wirkenden Kräfte hervorgerufen wird. Nun ist aber $\vec{r}_i = \vec{r}_j + \vec{r}_{ji}$ und $\vec{r}_{ji} \parallel \vec{F}_{ji}$ (d.h. $\vec{r}_{ji} \times \vec{F}_{ji} = \vec{0}$), also nach dem dritten Newtonschen Gesetz

$$\sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = \sum_{ij} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = - \sum_{ij} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = - \sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji},$$

wobei im letzten Schritt die beiden Summationsindizes vertauscht wurden. Daraus folgt aber $\sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = \vec{0}$ und daher

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \vec{0}.$$

Es gilt der ...

Drehimpulssatz:

Für Systeme wechselwirkender Teilchen ohne äußere Drehmomente ist der Gesamtdrehimpuls \vec{L} eine Erhaltungsgröße.

Nach Emmy Noether ist der Drehimpulssatz eine Folge der Isotropie des Raumes. Als Experiment zum Drehimpulssatz setzen wir uns auf einen Drehschemel mit zwei Hanteln in den Händen. Ziehen wir die Hanteln an uns heran, so wird die anfängliche Drehung als Folge des Drehimpulssatzes schneller: Wird der Radius kleiner, so muss die Geschwindigkeit im Gegenzug zunehmen, damit das Produkt aus beiden erhalten bleibt. Ein anderes Beispiel ist der Kreisel, der auch bei Bewegungen im Raum seine Drehachse unverändert beibehält.

1.5.3 Der Energiesatz

Um auf die letzte der drei Erhaltungsgrößen zu kommen, nämlich die *Energie*, müssen wir zunächst festlegen, was wir darunter verstehen. Eine Form der Energie ist die *Arbeit* W , die gegeben ist als Produkt aus Kraft und der Komponente der durch die Kraft bewirkten Bewegung in Krafrichtung. In Formeln geschrieben ist die Arbeit, die von der Kraft \vec{F} für die infinitesimal kleine Bewegung $d\vec{r}$ geleistet wird, gegeben durch das Skalarprodukt

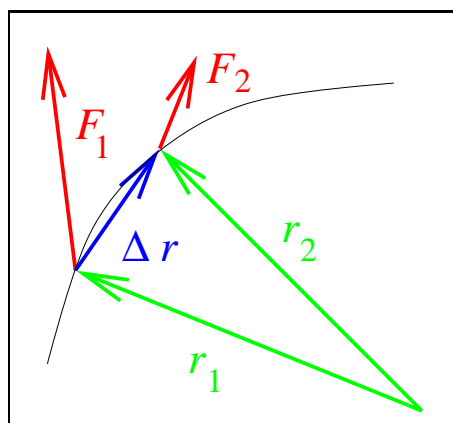


Abb. 1.16 Arbeit entlang eines Weges

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Gehen wir wieder aus vom zweiten Newtonschen Gesetz in seiner Form in Gleichung (1.1), so ist die Arbeit, die eine zeit-, orts- und möglicherweise auch geschwindigkeitsabhängige Kraft $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ auf die Bewegung eines Teilchens mit fester Masse m vom Ort \vec{r}_1 zum Ort \vec{r}_2 ausübt, gegeben durch

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \int_1^2 \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \int_1^2 d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \\ &= m \int_1^2 \vec{v} \cdot d\vec{v} = \left[\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} m \vec{v}_2^2 - \frac{1}{2} m \vec{v}_1^2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Dabei sind der Einfachheit halber die Integrationsgrenzen symbolisch geschrieben, d.h. bei Integrationsmaß $d\vec{r}$ sind die Grenzen $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ und $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$, bei Integrationsmaß $d\vec{v}$ aber $\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1)$ und $\vec{v}_2 = \vec{v}(t_2)$. Die rechte Seite der Gleichung (1.2) enthält nun die Differenz der *kinetischen Energie*

$$E_{\text{kin}} := \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

zwischen Ende und Anfang der Bewegung. Es gilt also der ...

Energiesatz:

Die an einem Teilchen verrichtete Arbeit $W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ist gleich der Änderung der kinetischen oder *Bewegungsenergie* $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$.

1.6 Experimente zu den Erhaltungssätzen

Damit die Erhaltungssätze nicht zu trocken wirken, sollen nun wieder ein paar Experimente folgen, welche die Gültigkeit dieser Sätze untermauern können. Es sind Anwendungen des Impuls- und des Energiesatzes.



Abb. 1.17 Die Rakete

1.6.1 Die Rakete

Die Rakete ist ein Beispiel dafür, dass die Masse eines bewegten Körpers nicht konstant bleiben muss. Da in der Rakete Treibstoff verbrannt wird, der als Gas nach hinten austritt und die Rakete antreibt, gilt $m = m_0 - \alpha t$, wobei m_0 die Ausgangsmasse und α der (lineare) Abbrand pro Sekunde ist. Da sich die Rakete im luftleeren Raum bewegt und keinen äußeren Kräften unterliegt (den Einfluss von nahen Schwerfeldern wollen wir zunächst nicht betrachten), so muss der Gesamtimpuls des Systems aus Rakete und Gas erhalten bleiben. Ist v die Geschwindigkeit der Rakete und v_e die Austrittsgeschwindigkeit des Gases in Bezug auf die Rakete, so gilt für die Änderung des Gesamtimpulses

$$0 = dp = m \cdot dv + v \cdot dm - (v - v_e)dm = m \cdot dv + v_e \cdot dm$$

(beachte, dass dm negativ ist). Diese Differentialgleichung lässt sich integrieren,

$$-\frac{dv}{v_e} = \frac{dm}{m} \quad \Rightarrow \quad v = v_0 + v_e \ln \left(\frac{m_0}{m} \right).$$

Natürlich wird man bei einer realistischen Rakete berücksichtigen, dass diese nicht ganz abgebrannt wird, sondern eine Nutzlast m_L bleibt. Die maximale Brenndauer ist damit gegeben als $t_{\text{max}} = (m_0 - m_L)/\alpha$.

Nun stemme sich die Rakete, was wesentlich realistischer ist, gegen das Gravitationsfeld der Erde. In Erdnähe ist daher

$$F = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v_e \frac{dm}{dt} = -mg.$$

Auch diese Differentialgleichung kann integriert werden, und man erhält

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{v_e}{m} \frac{dm}{dt} \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 - gt + v_e \ln \left(\frac{m_0}{m} \right), \quad m = m_0 - \alpha t.$$

Als Rechenbeispiel betrachten wir die Centaur-Rakete mit $v_0 = 0$ und $m_0 = 3 \cdot 10^6 \text{kg}$ sowie einem Abbrand von $\alpha = 1.29 \cdot 10^3 \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Aus der Nutzlast von $m_L = 2.78 \cdot 10^6 \text{kg}$ ergibt sich eine maximale Brenndauer von $t_{\max} = 155 \text{s}$. Die Austrittsgeschwindigkeit des Gases sei schließlich $v_e = 55 \cdot 10^3 \text{ms}^{-1}$. Als Ergebnis ergibt sich die Maximalgeschwindigkeit

$$v_{\max} = \left(55 \cdot 10^3 \cdot \ln \left(\frac{3}{2.78} \right) - 9.8 \cdot 155 \right) \text{ms}^{-1} = 2670 \text{ms}^{-1} \approx 9612 \text{km/h}.$$

1.6.2 Zwei elastisch stoßende Kugeln

Für zwei Kugeln der Massen m_1 und m_2 und in positive Richtung gerechneten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 vor dem elastischen Stoß sowie u_1 und u_2 nach dem Stoß gelten der ...

Impulssatz : $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$ und der

$$\text{Energiesatz : } \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{m_1}{2} u_1^2 + \frac{m_2}{2} u_2^2.$$

Dieses System lässt sich umstellen zu $m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2)$ und $m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2)$, und durch Division dieser beiden Gleichungen erhalten wir schließlich auch die zweite lineare Gleichung $v_1 + u_1 = u_2 + v_2$. Das System linearer Gleichungen lässt sich nach u_1 und u_2 auflösen, und es ergibt sich

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (1.3)$$

Wir betrachten zwei Beispiele:

- 1) Es sei $m_1 = m_2$, $v_1 = v$ und $v_2 = 0$ (die zweite Kugel ruht). Nach dem Stoß ist dann $u_1 = 0$ (die erste Kugel ruht) und $u_2 = v$. Zerlegt man die Vorgänge beim Klick-Klack in Einzelprozesse aus zwei Kugeln mit gleichen Massen, so gibt die vorliegende Rechnung genau diese vollständige Übertragung des Impulses von einem Ende der Kette von Kugeln gleicher Masse auf das andere Ende wieder.
- 2) Betrachten wir nun $m_1 = 2m_2 = 2m$, $v_1 = v$ und $v_2 = 0$. Dann wird der Impuls nicht vollständig übertragen. Vielmehr ist hier

$$u_1 = \frac{mv_1 + 2mv_2}{3m} = \frac{mv}{3m} = \frac{1}{3}v, \quad u_2 = \frac{mv_2 + 4mv_1}{3m} = \frac{4mv}{3m} = \frac{4}{3}v,$$

d.h. die schwerere Kugel bewegt sich mit einem Drittel ihrer Geschwindigkeit weiter. Im Falle $m_2 = 2m_1 = 2m$, $v_1 = v$ und $v_2 = 0$ dagegen ist $u_1 = -v/3$ und $u_2 = 2v/3$, d.h. die leichtere Kugel prallt mit einem Drittel ihrer Geschwindigkeit zurück.

1.6.3 Elastischer Stoß im Fall

Die soeben berechnete Formel für die Endgeschwindigkeiten im elastischen Stoß lässt sich auch auf den Fall und Aufprall zweier miteinander fallender Bälle übertragen. Die Aufprallgeschwindigkeit ergibt sich aus dem Energiesatz $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ zu $v = \sqrt{2gh}$. Dabei wird der untere Ball (beispielsweise ein Pflummi) den Boden als erster berühren, abprallen und sodann seinen Impuls an den oberen Ball (beispielsweise einen sehr viel leichteren Tennisball) übertragen. Die Frage, die uns bewegt, ist die nach der Höhe, in die diese beiden Bälle nach dem Geschehen hinaufspringen. Aus der vorigen Betrachtung ist ersichtlich, dass es nicht auf die Massen, sondern nur das Massenverhältnis ankommt. Es sei also $m_1 = \alpha \cdot m_2$. Kurz nach dem Abprallen des unteren Balles gilt $v_1 = v$ (nach oben) und $v_2 = -v$ (nach unten). Daraus berechnen sich die Endgeschwindigkeiten nach (1.3) zu

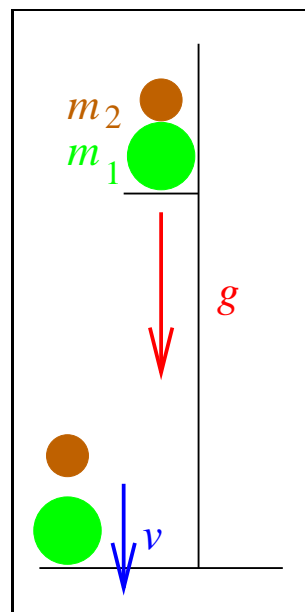


Abb. 1.18 Pflummi und Tennisball

$$u_1 = \frac{(\alpha - 1)v - 2v}{\alpha + 1} = \frac{\alpha - 3}{\alpha + 1}v, \quad u_2 = \frac{-(1 - \alpha)v + 2\alpha v}{\alpha + 1} = \frac{3\alpha - 1}{\alpha + 1}v$$

und die Höhen zu

$$h_1 = \frac{u_1^2}{2g} = \frac{(\alpha - 3)^2}{(\alpha + 1)^2}h, \quad h_2 = \frac{u_2^2}{2g} = \frac{(3\alpha - 1)^2}{(\alpha + 1)^2}h,$$

wobei h die Fallhöhe ist. Im Experiment sind die Massen $m_1 = 103.2g$ und $m_2 = 24.5g$, also $\alpha = 4.2$. Wir messen für $h = 15cm$ eine Höhe von $h_2 = 68cm$, während das errechnete Höhenverhältnis etwa $h_2/h \approx 5$ ist.

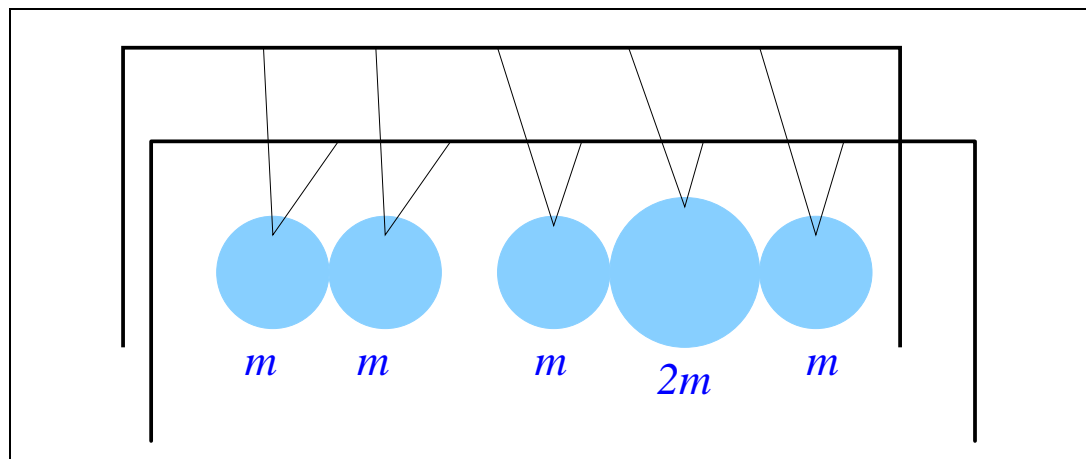


Abb. 1.19 Klick-Klack mit schwerer Kugel

1.6.4 Klick-Klack mit schwerer Kugel

Wir untersuchen das scheinbar chaotische Verhalten eines Klick-Klacks aus fünf Kugeln, bei denen die vierte die doppelte Masse der anderen besitzt. Nach dem Experiment, das wir mit dem Auslenken der ersten beiden Kugel begonnen haben, analysieren wir das Verhalten, wobei wir erneut Gleichung (1.3) für jeweils zwei Kugeln verwenden, von denen die hintere die vordere einholt. Das Ergebnis ist in sechs Schritten:

Kugel 1:	v	v	0	0	$-\frac{1}{3}v$	$-\frac{1}{3}v$
Kugel 2:	v	0	v	$-\frac{1}{3}v$	0	$-\frac{1}{27}v$
Kugel 3:	0	v	$-\frac{1}{3}v$	v	$-\frac{1}{27}v$	0
Kugel 4:	0	0	$\frac{2}{3}v$	$\frac{2}{9}v$	$\frac{20}{27}v$	$\frac{20}{27}v$
Kugel 5:	0	0	0	$\frac{8}{9}v$	$\frac{8}{9}v$	$\frac{8}{9}v$

Wir stellen fest, dass in jedem Schritt der Gesamtimpuls $2mv$ ist.

1.6.5 Inelastischer Stoß

Beim inelastischen Stoß ist zwar der Impuls erhalten, jedoch die Energie nicht. Eine Reihe von Beispielen dazu haben wir in Abschnitt 1.5.1 kennengelernt. Es gilt $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$, aber

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 + \delta E,$$

wobei δE der Energieverlust ist. Als Beispiel betrachten wir zwei gleichgroße Massen $m_1 = m_2 = m$ mit $v_1 = v$ und $v_2 = 0$. Nach dem Stoß haften diese Massen aneinander, bilden also eine Masse von $2m$. Nach dem Impulssatz bewegt sich diese Masse mit der halben Geschwindigkeit $v/2$. Der Energiesatz liefert

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2m) \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \delta E = \frac{1}{4}mv^2 + \delta E \quad \Rightarrow \quad \delta E = \frac{1}{4}mv^2.$$

Was geschieht nun beim Stoß? Es wird kurzfristig eine Kraft zwischen den Körpern aufgebaut. Das zeitliche Integral über diese Kraftentwicklung liefert den Kraftstoß J , also die schraffierte Fläche in Abbildung 1.20. Ist t_0 der Zeitpunkt der größten Kraftwirkung, so können wir den Kraftstoß unterteilen in die Fläche J_1 vor diesem Moment und die Fläche J_2 nach diesem Moment. Ist c die (unbekannte) gemeinsame Geschwindigkeit der beiden Körper in diesem Moment, so gilt

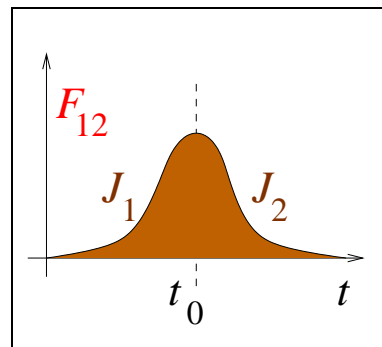


Abb. 1.20 Restitution

$$J_1 = m_1c - m_1v_1, \quad J_2 = m_1u_1 - m_1c.$$

Da die Kraftstöße für die beiden Körper entgegengesetzt gleich groß sind, ist eine sinnvolle Beschreibungsgröße für den Stoß der von Newton eingeführte *Restitutionskoeffizient*

$$\varepsilon_1 = \frac{J_2}{J_1} = \varepsilon = \frac{-J_2}{-J_1} = \varepsilon_2.$$

Der nicht bekannte Parameter c lässt sich entfernen, und wir erhalten

$$\varepsilon = -\frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1}.$$

Ist der zweite Körper beispielsweise die Erde, der erste aber ein Pfummi, so gilt $v_2 = u_2 = 0$, also

$$\varepsilon = -\frac{u_1}{v_1} = \sqrt{\frac{h_1}{h}}.$$

Tritt kein Energieverlust auf, so ist $h_1 = h$ und damit $\varepsilon = 1$. Gleiches ergibt sich auch bei Einsetzen der Formeln (1.3) für den elastischen Stoß. Wie hängt nun aber der Energieverlust mit dem Restitutionskoeffizienten zusammen? Ist der Impulsübertrag $m_1(v_1 - u_1) = \Delta p = m_2(u_2 - v_2)$, so ergibt sich für den Energieverlust

$$\begin{aligned} \delta E &= \frac{1}{2}m_1(v_1^2 - u_1^2) + \frac{1}{2}m_2(v_2^2 - u_2^2) = \frac{1}{2}\Delta p(v_1 + u_1) - \frac{1}{2}\Delta p(v_2 + u_2) = \\ &= \frac{1}{2}\Delta p(v_1 - v_2 + u_1 - u_2) = \frac{1}{2}\Delta p(1 - \varepsilon)(v_1 - v_2) = \frac{1}{2}\mu(1 - \varepsilon^2)(v_1 - v_2)^2, \end{aligned}$$

wobei $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ die reduzierte Masse ist. Im letzten Schritt wurde Δp ebenfalls durch ε ausgedrückt. Im vorher betrachteten Fall $m_1 = m_2 = m$ (und damit $\mu = m/2$) sowie $v_1 = v$ und $v_2 = 0$ ergibt sich $\delta E = mv^2(1 - \varepsilon^2)/4$ und $\varepsilon = 0$. Dies bedeutet, dass der Energieverlust daher rührt, dass der zweite Kraftstoßanteil J_2 verschwindet. Wir sprechen von einem vollständig unelastischen Stoß, wenn $\varepsilon = 0$ ist, und von einem vollständig elastischen für $\varepsilon = 1$. Der Energieverlust ist übrigens bei vorgegebenem Restitutionskoeffizienten gerade bei gleichen Massen am größten, also im betrachteten Fall, wo er die Hälfte der Energie ausmacht.

1.6.6 Konservative und nichtkonservative Kräfte

In dem vorangegangenen Beispiel von elastischem und inelastischem Stoß, das wir in allen Einzelheiten untersucht haben, sind wir einem Prozess begegnet, bei dem je nach Prozessverlauf Energie erhalten wurde bzw. verloren ging. Wir sprechen hier von *konservativen* bzw. *nichtkonservativen Kräften*. Vom modernen Standpunkt aus betrachtet ist natürlich in beiden Fällen die Gesamtenergie erhalten geblieben. Im letzteren Fall wurde die mechanische Energie schlicht in eine andere Energieform umgewandelt, beispielsweise in Wärmeenergie.

2. Anwendungen der Newtonschen Mechanik

Nachdem wir uns im vergangenen Kapitel vornehmlich mit den direkten Auswirkungen der Newtonschen Gesetze befasst haben, soll es in diesem zweiten Kapitel mehr um allgemeinere Anwendungen gehen. So befassen wir uns mit den eben abgesprochenen konservativen und nichtkonservativen Kräften, betrachten Schwingungen eines und mehrerer Massenpunkte und gehen dann über zu Vielteilchensystemen. Eine ausführliche Beschreibung eines Zweiteilchensystems findet sich in Form der Keplerschen Gesetze, während ein Vielteilchensystem mit unveränderlicher relativer Lage der Teilchen zueinander um Rahmen der Theorie starrer Körper behandelt wird.

2.1 Konservative Kräfte

Ist der Energieverlust $\delta E = 0$ und hängt damit die kinetische Energie der Teilchen nur vom Anfangs- und Endpunkt der Bewegung, nicht aber vom Weg selbst ab, so gilt dies auch für die verrichtete Arbeit. In diesem Fall nennen wir die Kraft *konservativ*, und es gilt

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (2.1)$$

Für konservative Kräfte ist also das Integral der Arbeit über einem geschlossenen Weg Null. Dies gilt insbesondere für Zentralkräfte. Wirkt die Zentralkraft aus dem Ursprung heraus, so kann man in Gedanken einen Kreisring der Breite Δr herausnehmen und zeigen, dass die Arbeit für die Überwindung dieses Kreisringes für beide in

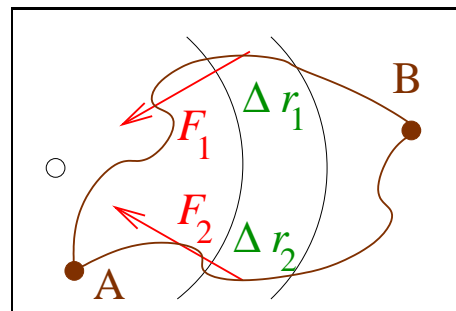


Abb. 2.1 Wegeunabhängigkeit

$$\vec{F}(\vec{r}_1) \Delta \vec{r}_1 = |\vec{F}(\vec{r}_1)| \Delta r = |\vec{F}(\vec{r}_2)| \Delta r = \vec{F}(\vec{r}_2) \Delta \vec{r}_2.$$

Da aber nach heutigem Stand des Wissens alle Elementarkräfte Zentralkräfte sind, ist die Wegeunabhängigkeit in diesen Fällen gewährleistet. In diesem Fall existiert eine Stammfunktion zu $-\vec{F}(\vec{r})$, die wir als *Potential* V bezeichnen,

$$- \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1).$$

Das Potential ist eine skalare Funktion des Ortes, und nach dem Energiesatz gilt

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = E_{\text{kin}}(\vec{v}_1) - E_{\text{kin}}(\vec{v}_2) \quad \Leftrightarrow \quad E_{\text{kin}}(\vec{v}_1) + V(\vec{r}_1) = E_{\text{kin}}(\vec{v}_2) + V(\vec{r}_2).$$

Die Summe $E := E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}} + V$ aus kinetischer und durch das Potential gegebener potentieller Energie ist also eine Erhaltungsgröße.

2.1.1 Das Potential

Ein zweidimensionales Potential lässt sich vorstellen als eine Art Geländere relief, auf denen sich Kugeln bewegen. Ebenso wie diese Kugeln von höhergelegenen Punkten in tiefere Regionen rollen, so bewegt sich ein Körper im dreidimensionalen Raum von höheren zu tieferen Potentialwerten V . Die Kraft, die ihn antreibt, ist durch die *partiellen Ableitungen* gegeben,

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) \quad \text{mit} \quad F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2.2)$$

Dabei ist unter

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x}$$

die Ableitung der Funktion V in Abhängigkeit von x bei festgehaltenen weiteren Parametern y und z zu verstehen. Umgekehrt ist

$$-\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right).$$

Damit sich aus diesem Integral wieder das Potential ergibt, muss sich der Integrand als Differential (ähnlich wie dx , dy und dz), nämlich als *totales Differential* des Potentials,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

schreiben lassen, d.h. es muss eine Funktion $V(\vec{r}) = V(x, y, z)$ geben derart, dass Gleichung (2.2) erfüllt ist. Wir schreiben

$$\vec{F}(x, y, z) = (F_x, F_y, F_z) = - \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) V(x, y, z)$$

und bezeichnen

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

als *Gradient*, der statt mit dem Symbol *Nabla* ∇ auch häufig durch die Bezeichnung „grad“ ausgedrückt wird. Er ist eine vektorielle Differentiationsvorschrift. Wie kann man nun aber entscheiden, ob es ein Potential gibt, wenn man nur die Kraft kennt? Angenommen, es gelte $F_x = -\partial V/\partial x$. Dann gilt für die partielle Integration dieser Kraftkomponente

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x},$$

Da sich die beiden partiellen Ableitungen vertauschen lassen, muss verallgemeinert auf alle (drei) Raumrichtungen also gelten

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$$

oder anders ausgedrückt das vektorielle Verschwinden der *Rotation*

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \vec{0}.$$

Zusammenfassend können wir festhalten, dass konservative Kräfte dadurch ausgezeichnet sind, dass sie *wirbelfrei* sind, d.h. dass ihre Rotation verschwindet. Die Berechnung des Potentials (bis auf eine additive Konstante) geschieht durch die Berechnung des Integrals in Gleichung (2.1), das dann unabhängig vom Weg sein muss.

2.1.2 Andere Koordinatensysteme

Besitzt das Potential eine besondere Symmetrie, so ist statt des kartesischen Koordinatensystems möglicherweise ein anderes, krummliniges vorzuziehen. So ist die Gravitationskraft (und damit auch das Gravitationspotential) radialsymmetrisch,

$$\vec{F}_G(\vec{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}.$$

Anstelle des kartesischen Koordinatensystems mit Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{e}_x \frac{dx}{dt} + \vec{e}_y \frac{dy}{dt} + \vec{e}_z \frac{dz}{dt}$$

könnte man beispielsweise an das *mitgeführte Koordinatensystem* mit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{e}_T v$$

oder an das der *ebenen Polarkoordinaten* (r, θ) denken mit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{e}_r r) = \frac{d\vec{e}_r}{dt} r + \vec{e}_r \frac{dr}{dt}$$

(vgl. Abbildung 2.2). Mit

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \vec{e}_x \cos \theta + \vec{e}_y \sin \theta, \\ \vec{e}_\theta &= -\vec{e}_r \sin \theta + \vec{e}_y \cos \theta \end{aligned}$$

ergibt sich (da \vec{e}_x und \vec{e}_y konstant sind)

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = -\vec{e}_x \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + \vec{e}_y \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \vec{e}_\theta \dot{\theta}$$

und damit $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$.

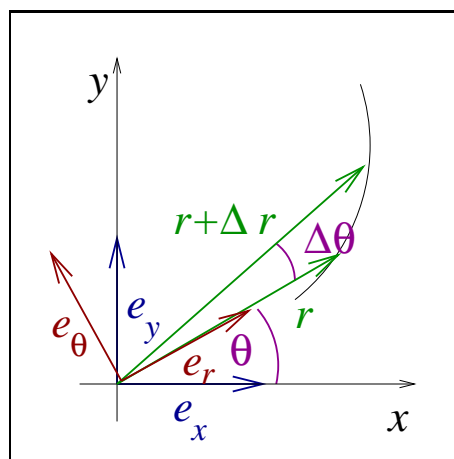


Abb. 2.2 Ebene Polarkoordinaten

2.1.3 Der Gradient in ebenen Polarkoordinaten

Am Beispiel des als eben (d.h. zweidimensional) gedachten Gravitationsfelders wollen wir zeigen, dass der Gradient in ebenen Polarkoordinaten gegeben ist durch

$$\nabla_{r,\theta} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Dazu gehen wir aus vom Potential $V = -Gm_1m_2/r$ und bestimmen den Gradienten der Funktion $V = V(r, \theta)$ bzw. $V = V(x, y)$. Es ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial r} V(r, \theta) = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} V(r, \theta) = 0$$

und damit

$$\vec{F}_G = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}.$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, y) = \frac{Gm_1m_2}{2\sqrt{x^2+y^2}^3} 2x, \quad \frac{\partial}{\partial y} V(x, y) = \frac{Gm_1m_2}{2\sqrt{x^2+y^2}^3} 2y$$

und damit

$$\vec{F}_G = -\frac{Gm_1m_2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} (x, y) = -G \frac{m_1m_2}{r^3} \vec{r}.$$

2.1.4 Astronautische Geschwindigkeit

Mit dem soeben als richtig erwiesenen Gravitationspotential können wir eine astronautische Frage klären, nämlich die nach der Mindestgeschwindigkeit einer Rakete, welche dem Gravitationsfeld der Erde entweichen soll. Aus der Energieerhaltung

$$\frac{m}{2} v^2(r_E) + V(r_E) = E_{\text{kin}}(\infty) + V(\infty) = 0,$$

bei der r_E der Radius der Erde und $V(r) = GmM/r$ das Gravitationspotential ist, ergibt sich durch Umstellung

$$v(r_E) = \sqrt{-\frac{2V(r_E)}{m}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_E}} = \sqrt{2gr_E} \approx 11 \frac{\text{km}}{\text{s}},$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass

$$mg = -\left. \frac{dV}{dt} \right|_{r=r_E} = \frac{GmM}{r_E^2} \Rightarrow g = \frac{GM}{r_E^2}.$$

2.1.5 Beispiele für Potentiale

Ein Potential (hier der Einfachheit halber nur in einer Dimension) besitzt im allgemeinen lokale Minima und Maxima. Lokale Minima des Potentials sind Punkte stabilen Gleichgewichts, denn die Kraft

$$F(x_0 \pm \Delta x) = -\frac{d}{dx}V(x)\Big|_{x=x_0+\Delta x} = -\frac{d}{dx}V(x)\Big|_{x=x_0} - \Delta x \frac{d^2}{dx^2}V(x)\Big|_{x=x_0}$$

steht immer entgegengesetzt zur Auslenkung Δx aus dieser Gleichgewichtslage x_0 , wie diese Taylorentwicklung zeigt, da ein lokales Minimum durch eine verschwindende erste und negative zweite Ableitung gekennzeichnet ist. Ein lokales Maximum des Potentials aber stellt ein labiles Gleichgewicht dar.

Nebenstehend ist gezeigt, wie sich ein Potential im Phasenraum widerspiegelt, also der Gegenüberstellung von Ort x (in der Horizontalen) und Geschwindigkeit v (in der Vertikalen). Für drei Gesamtenergien sind die Geschwindigkeitsprofile zu sehen. Ist die Energie höher als alle Potentialberge ($E = E_1$), so kann sich der Körper frei bewegen, wobei sich die Geschwindigkeit verändert. Ist die Energie aber abgesunken, so bewegt sich der Körper nur noch in einem begrenzten Bereich ($E = E_2$ bzw. $E = E_3$).

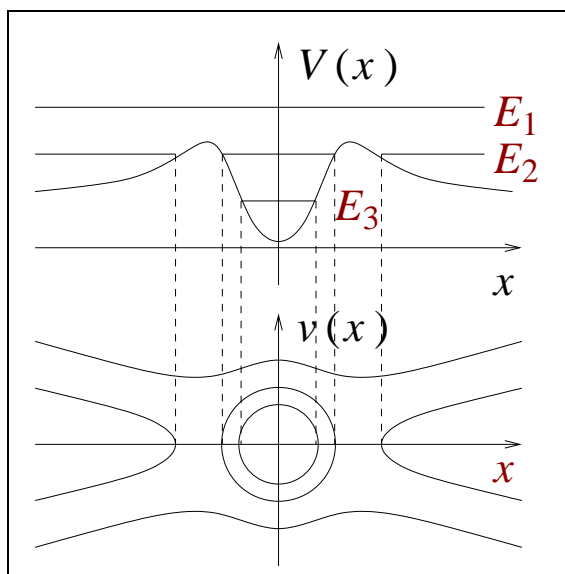


Abb. 2.3 Potential und Phasenraum

Ein spezielles Potential ist das des Federpendels, $V = \frac{1}{2}kx^2$. Aus ihm berechnet sich die (rücktreibende) Kraft $F = -dV/dx = -kx$. Ist die Gesamtenergie gegeben durch

$$E = E_{\text{kin}} + V(x) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

so lassen sich aus deren Konstanz die Bewegungsgleichungen herleiten, indem wir die Energiegleichung nach der Zeit ableiten. Wegen $v = \dot{x}$ erhalten wir

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$$

und daraus $m\ddot{x} + kx = 0$.

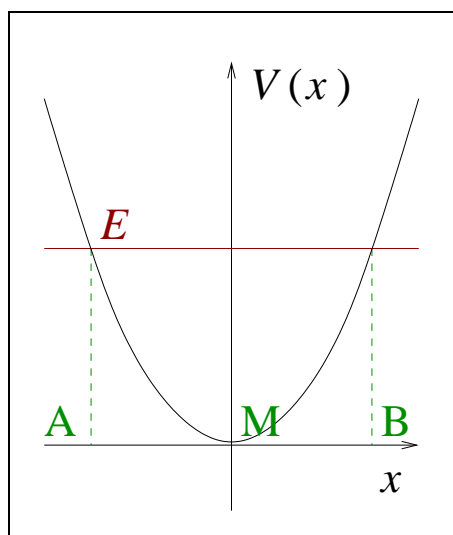


Abb. 2.4 Potential des Federpendels

2.1.6 Impulssatz aus Energiesatz und Galileiinvarianz

Am Beispiel des Stoßes zweier Teilchen mit Energiebilanz

$$\frac{m_1}{2} \vec{v}_1^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_2^2 = \frac{m_1}{2} \vec{u}_1^2 + \frac{m_2}{2} \vec{u}_2^2 + \delta E \quad (2.3)$$

vom Ende des letzten Kapitels kann gezeigt werden, dass sich aus dem Energiesatz und der Galileiinvarianz der Impulssatz ableitet. Eine Galileitransformation in ein System nämlich, das sich gegenüber dem ersten mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, verändert die Geschwindigkeiten \vec{v}_i und \vec{u}_i in $\vec{v}_i - \vec{v}$ und $\vec{u}_i - \vec{v}$. Damit erhält man als neue Energiebilanz

$$\frac{m_1}{2} (\vec{v}_1 - \vec{v})^2 + \frac{m_2}{2} (\vec{v}_2 - \vec{v})^2 = \frac{m_1}{2} (\vec{u}_1 - \vec{v})^2 + \frac{m_2}{2} (\vec{u}_2 - \vec{v})^2 + \delta E, \quad (2.4)$$

Die Differenz von Gleichung (2.4) mit (2.3) liefert aber

$$(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) \cdot \vec{v} = (m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2) \cdot \vec{v}.$$

Damit dies für jede beliebige Relativgeschwindigkeit \vec{v} gelten kann, ist zu fordern $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$. Damit gilt der Impulssatz auch dann, wenn dem (inelastischen) Prozess Energie δE verloren geht.

2.2 Nichtkonservative Kräfte

Nichtkonservative Kräfte erhalten nicht die mechanische Energie, sondern wandeln diese in andere Energieformen (z.B. Wärme) um. Zu ihnen zählt die Reibungskraft, aber auch die Viskosität.

2.2.1 Die Reibungskraft

Will man einen Körper in Bewegung setzen, so widerstrebt er zunächst diesem Bemühen. Die *Haftreibung* setzt der angelegten ziehenden Kraft eine gleich große, aber entgegengesetzte Kraft entgegen (siehe Abbildung 2.5 links). Ihr maximaler Wert $F_H = \mu_H N$ ist proportional zur Auflagekraft N , die bei flach auf dem Boden liegenden Gegenständen durch mg gegeben ist. Überschreitet die ziehende Kraft diesen maximalen Wert, so beginnt der Körper zu gleiten. Auch in diesem Fall gibt es eine Gegenkraft. Diese ist aber nicht mehr gleich groß, sondern durch $\mu_G N$ gegeben, wobei der Koeffizient für die *Gleitreibung* μ_G kleiner ist als derjenige für die Haftreibung μ_H . Schließlich gibt es noch die *Rollreibung*, von der hier aber nicht die Rede sein soll. Die Haftreibung lässt sich übrigens bestimmen, indem man den Körper auf eine schiefe Ebene legt, deren Neigungswinkel θ einzustellen ist (vgl. Abbildung 2.5 rechts). Die Auflage- und Zugkraft sind gegeben durch

$$N = mg \cos \theta, \quad F = mg \sin \theta \quad \Rightarrow \quad F_H = \mu_H N = \mu_H mg \cos \theta.$$

Ist $F = F_H$, so beginnt der Körper unter der Wirkung der Erdanziehung zu gleiten. In diesem Fall ist $mg \sin \theta = \mu_H mg \cos \theta$, also $\mu_H = \tan \theta$. Für die

Gleitreibung ist die Weglänge zu bestimmen, nach der ein Körper in der Ebene mit bestimmter Anfangsgeschwindigkeit zur Ruhe kommt ($L = v^2/(2\mu_G g)$).

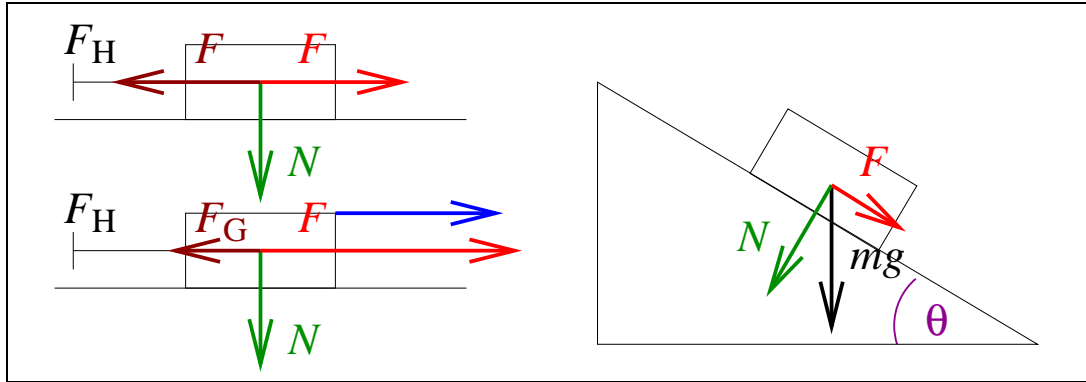


Abb. 2.5 Die Reibungskräfte und ihre Bestimmung

2.2.2 Viskose Flüssigkeit

Haft- und Gleitreibung sind Beispiele für eine konstante, nicht von der Geschwindigkeit der Bewegung abhängige Reibungsformen. Dies ist nicht der Fall, wenn sich ein Körper durch eine Flüssigkeit bewegt, die eine gewisse Trägheit oder Viskosität besitzt. Die *Viskosität* η ist definiert als Verhältnis der Reibungskraft zur an der Flüssigkeit reibenden Fläche und dem Geschwindigkeitsgradienten, oder umgekehrt

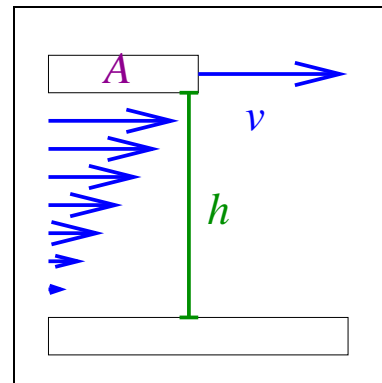


Abb. 2.6 Definition der Viskosität

$$F_R = A\eta \frac{dv}{dh}. \quad (2.5)$$

Die Einheit der Viskosität ist die Poise, benannt nach dem französischen Physiologen und Physiker **Jean Louis Marie Poiseuille** (1797–1869), und es gilt $10P = 1\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$. Nach Poiseuille und dem deutschen Ingenieur **Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen** (1797–1884) ist auch ein Gesetz benannt, das die Durchflussgeschwindigkeit durch ein Rohr beschreibt. Dieses Gesetz lässt sich recht einfach wie folgt herleiten:

Dazu betrachten wir nicht die Flüssigkeit als gegenüber dem Rohr bewegt, sondern umgekehrt das Rohr gegenüber der längs der Zentralachse des Rohres als ruhend betrachteten Flüssigkeit. In Abhängigkeit vom Abstand r von der Zentralachse folgt aus Gleichung (2.5)

$$2\pi r l \eta \frac{dv}{dr} = \Delta p \pi r^2 \quad \text{und damit}$$

$$v(r) = \int_0^r \frac{\Delta p}{2l\eta} r' dr' = \frac{\Delta p}{4l\eta} r^2.$$

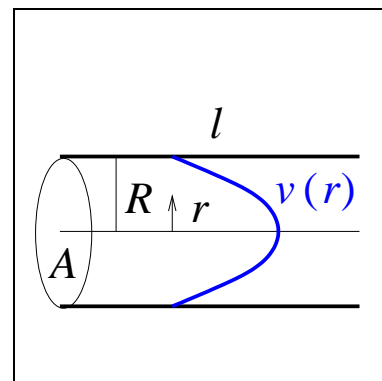


Abb. 2.7 Hagen-Poiseuillesches Gesetz

Wir erhalten also eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung. Drehen wir den Spieß um, d.h. betrachten das Rohr als ruhend und die Flüssigkeit als beweglich, so gilt

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4l\eta}(R^2 - r^2)$$

(wegen $v(R) = 0$). Das Volumen, das pro Zeiteinheit aus dem Rohr austritt, ist differentiell gegeben als $dV(r) = v(r)t dA = v(r)t 2\pi r dr$ und aufintegriert

$$\begin{aligned} V &= t \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{\pi \Delta p t}{2l\eta} \left(\int_0^R R^2 r dr - \int_0^R r^3 dr \right) = \\ &= \frac{\pi \Delta p t}{2l\eta} \left[\frac{1}{2} R^2 r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^R = \frac{\pi \Delta p t R^4}{8l\eta}. \end{aligned}$$

Der Volumenfluss ist daher gemäß dem *Hagen-Poiseuilleschen Gesetz*

$$j = \frac{V}{t} = \frac{\pi \Delta p R^4}{8l\eta}.$$

2.2.3 Etwas Vorarbeit: das Archimedische Prinzip

Um die Viskosität einer Flüssigkeit bestimmen zu können, müssen wir etwas Vorarbeit leisten. Zu ergründen ist ein Prinzip, das der griechische Mathematiker, Physiker und Ingenieur **Archimedes von Syrakus** (287–212 v. Chr.) gefunden hat. Die Legende besagt, dass er dieses Prinzip fand, als er im Bade saß. Völlig überwältigt von seiner Entdeckung sei er danach nackt auf die Straße gelaufen und habe „Heureka!“ geschrien, übersetzt „ich hab's!“ Was sagt das Archimedische Prinzip nun aus?

Archimedisches Prinzip:

Ein Körper verliert in einer Flüssigkeit so viel an Gewicht, wie die von ihm verdrängte Flüssigkeitsmenge wiegt.

Wie kann man nun aus heutiger Sicht auf dieses Prinzip kommen? Grundlegender als Archimedes Prinzip ist heute die barometrische Höhenformel, die besagt, dass der Druck in einer Wassertiefe h durch die darüberliegende Wassersäule erzeugt wird (auch wenn diese nicht direkt über dem Punkt liegt) und durch die Formel $p = h\rho_{\text{fl}}g$ gegeben ist. Dieser Druck wirkt in alle Richtungen. Betrachten wir nun den Zylinder in Abbildung 2.8 mit Querschnittsfläche A , so ist die Differenz der hydrostatischen Kräfte

$$F = A(p_1 - p_2) = a(h_1 - h_2)\rho_{\text{fl}}g = V\rho_{\text{fl}}g = m_{\text{fl}}g.$$

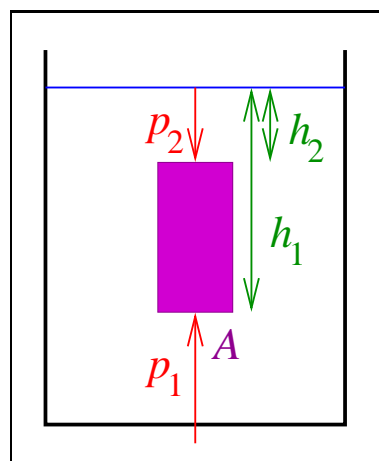


Abb. 2.8 Archimedisches Prinzip

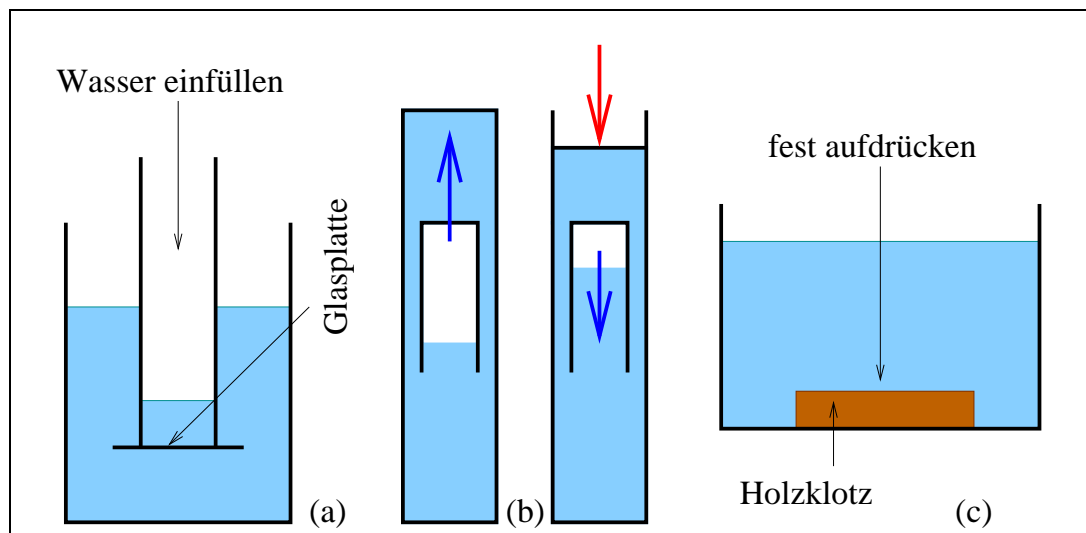


Abb. 2.9 Hydrostatischer Druck (a), kartesischer Taucher (b) und Klotz am Boden (c)

Wir machen einige Versuche zum *hydrostatischen Druck*. In Abbildung 2.9(a) ist ein Rohr mit einer Glasplatte unter Wasser verschlossen. Gießen wir in das Rohr Wasser, so löst sich die Glasplatte erst dann, wenn die Höhe des Wassers im Rohr fast die im Behälter erreichte hat. Bis dahin hält der von unten wirkende hydrostatische Druck dem Gewicht der Glasplatte die Waage. Der *kartesische Taucher* in Abbildung 2.9(b) schwebt im Wasser. Er besteht aus einem mit Luft gefüllten Reagenzglas, in das etwas Wasser eingedrungen ist. Setzen wir das Wasser im umgebenden Behälter durch Drücken der Membran unter Druck, so wird die Luft im kartesischen Taucher zusammengedrückt, er wird schwerer und sinkt. Pressen wir schließlich in einem Behälter mit Wasser einen Holzblock fest auf den Grund, so erfährt er im Gegensatz zum normalen Verhalten (Holz ist leichter als Wasser) keinen Auftrieb, da auf seine Oberseite ein hydrostatischer Druck wirkt, auf seine Unterseite dagegen nicht.

2.2.4 Stokesches Gesetz und Messung der Viskosität

Wie kann nun das Archimedische Prinzip verwendet werden, um die Viskosität einer Flüssigkeit zu bestimmen? Dazu machen wir uns zu Nutze, dass für die Reibungskraft auf eine sich in einer viskosen Flüssigkeit bewegende Kugel nach dem *Stokeschen Gesetz*

$$\vec{F}_R = -6\pi r\eta\vec{v}$$

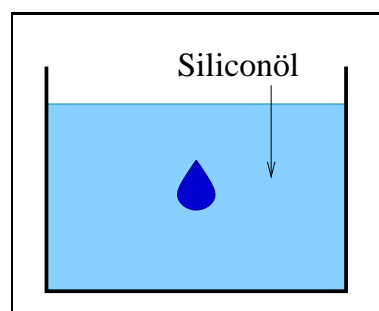


Abb. 2.10 Fallender Tropfen

gilt (**George Gabriel Stokes**, 1819–1903, irischer Mathematiker und Physiker).^{*} Es gilt also für einen fallenden Tropfen wie in Abbildung 2.10 die

^{*} Die Herleitung des Stokeschen Gesetzes findet sich z.B. im Buch von William C. Hinds mit dem Titel "Aerosol Technology: Properties, Behaviour and Measurement of Airborne Particles", John Wiley & Sons, New York, 1999.

Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(mv) = (m - m_{\text{fl}})g - 6\pi r\eta v.$$

Diese Differentialgleichung können wir (für konstante Masse) umstellen zu

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{6\pi r\eta}{m}(v - v_{\text{max}}), \quad v_{\text{max}} := \frac{(m - m_{\text{fl}})g}{6\pi r\eta}.$$

Durch Integration ergibt sich

$$\ln\left(\frac{v - v_{\text{max}}}{v_0 - v_{\text{max}}}\right) = -\frac{6\pi r\eta}{m}t \quad \Leftrightarrow \quad v(t) = v_{\text{max}} + (v_0 - v_{\text{max}})e^{-6\pi r\eta t/m}.$$

Mit Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = v_0 = 0$ erhalten wir schließlich

$$v(t) = v_{\text{max}} \left(1 - e^{-6\pi r\eta t/m}\right).$$

Aus dieser Formel wird die Bedeutung von v_{max} klar: es ist diejenige Geschwindigkeit, die sich nach einer längeren Fallstrecke des Tropfens in der Flüssigkeit einstellt. Diese wie auch die Ausmessungen des Tropfens und die Dichten ρ des Tropfens und ρ_{fl} der Flüssigkeit lassen sich bestimmen. Daraus aber folgt die Viskosität, denn

$$v_{\text{max}} = V \frac{(\rho - \rho_{\text{fl}})g}{6\pi r\eta} = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{(\rho - \rho_{\text{fl}})g}{6\pi r\eta} = \frac{2r^2 g}{9\eta}(\rho - \rho_{\text{fl}})$$

und folglich

$$\eta = \frac{2r^2 g}{9v_{\text{max}}}(\rho - \rho_{\text{fl}}).$$

Die Arbeit, die im allgemeinen gegen eine geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft geleistet wird, ist $dW' = F_R dx = -Rv dx$. Die *Leistung*, also die Arbeit pro Zeiteinheit, ist

$$P' = \frac{dW'}{dt} = -Rv \frac{dx}{dt} = -Rv^2.$$

Reibungseffekte treten nicht nur in Flüssigkeiten, sondern auch in Luft oder in elektrischen Schaltkreisen auf, wo sie als Dämpfung bzw. elektrischer Widerstand bezeichnet werden. Der Leistungsverlust durch Reibung führt zur Dämpfung von Vorgängen. Bei den im nächsten Kapitel behandelten Schwingungsphänomenen stellt eine solche Dämpfung ein wichtiges, charakterisierendes Element dar. Dabei sind die behandelten schwingenden Systeme durchaus verschieden und reichen vom mathematischen oder Fadenpendel bis zum elektrischen Schwingkreis, wo das dämpfende Element der elektrische Widerstand ist.

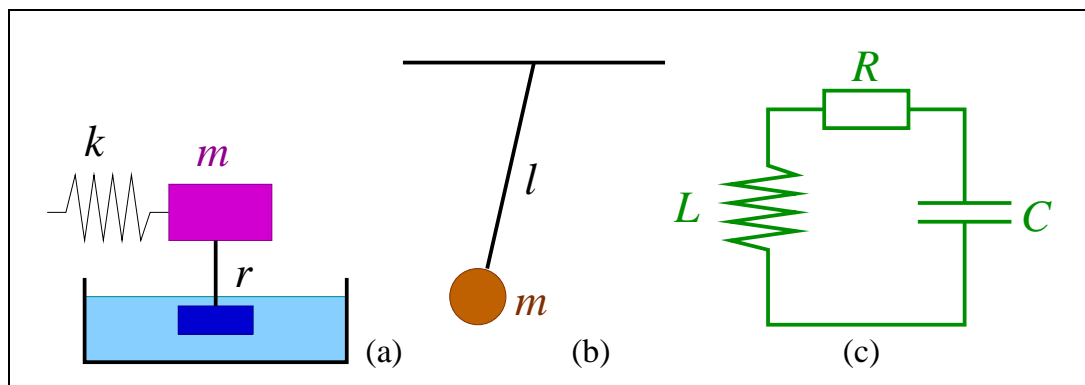


Abb. 2.11 Federpendel (a), Fadenpendel (b) und elektrischer Schwingkreis (c)

2.3 Schwingungen

Schwingungen treten in der Natur in vielfältiger Form auf. Als drei Beispiele seien hier nur das Federpendel (Abbildung 2.11(a)) genannt, bei dem die Dämpfung beispielsweise durch einen Rührer im Wasser hervorgerufen wird, das Fadenpendel (Abbildung 2.11(b)) mit Luftreibung, und schließlich der erst im Rahmen der „Vorlesung zur Physik II“ im nächsten Semester vollständig zu behandelnde elektrische Schwingkreis aus Spule mit Induktion L , Kondensator mit Kapazität C und elektrischem Widerstand R (Abbildung 2.11(c)).

2.3.1 Versuch zum Fadenpendel

Wir messen die Schwingungsdauern verschieden langer Fadenpendel. Für einen Faden der Länge $l = 100\text{cm}$ erhalten wir eine Schwingungsdauer von $T = 2\text{s}$, für einen Faden der Länge $l = 50\text{cm}$ einen Wert von $T = 1.42\text{s}$, und für einen Faden der Länge $l = 25\text{cm}$ schließlich $T = 1.05\text{s}$. Wir sehen, dass bei der Viertelung der Länge die Schwingungsdauer etwa um die Hälfte fällt. Den exakten Zusammenhang $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ für das mathematische Pendel werden wir später herleiten. Ein Fadenpendel ist übrigens dann ein mathematisches Pendel, wenn die angehängte Masse als punktförmig angesehen werden kann und wenn die Auslenkung nicht zu groß ist. Was das beides bedeutet, werden wir ebenfalls bald sehen.

2.3.2 Bewegungsgleichungen

Die Auslenkung einer Schwingung kann durch trigonometrische Funktionen, also Sinus- und Cosinusfunktionen ausgedrückt werden, also beispielsweise

$$x(t) = a \cos(\omega t + \alpha).$$

Dabei ist a die maximale Auslenkung oder *Amplitude*, $\omega t + \alpha$ die (zeitabhängige) *Phase*, α darin die *Nullphase* oder *Phasenverschiebung* und x die *Auslenkung*. $\omega = 2\pi\nu$ ist die *Kreisfrequenz*, ν aber die *Frequenz*, die mit der *Periode* T über $\nu = 1/T$ in Beziehung steht und die Schwingungen pro Sekunde in der Einheit Hertz ($1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$) angibt, benannt nach dem deutschen Physiker **Heinrich Rudolf Hertz** (1857–1894). Eine positive Phasenverschiebung α

verschiebt die Cosinusschwingung um die Zeit zurück, denn $\omega t_0 + \alpha = 0$ liefert $t_0 = -\alpha/\omega$. Durch zweifache Ableitung der Funktion $x(t)$ nach t erhält man $\dot{x}(t) = -a\omega \sin(\omega t + \alpha)$ und $\ddot{x}(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t + \alpha)$, welches die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

erfüllt. Diese Differentialgleichung ist aus dem Kraftgesetz abzuleiten.

- *Das Federpendel:* die rückstellende Kraft ist $F = -kx$, das Kraftgesetz führt also auf $m\ddot{x} = -kx$ oder

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Durch Vergleich ergibt sich $\omega^2 = k/m$ und damit $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Ist das Federpendel dagegen vertikal aufgehängt, so wirkt auf die Masse zusätzlich die Schwerkraft, und das Kraftgesetz liefert $m\ddot{x} = -kx + mg$ oder $\ddot{x} + \omega^2 x = g$. Dies wird gelöst durch eine Funktion $x(t)$, zu der eine Konstante mg/k hinzugefügt worden ist, $x(t) = a \cos(\omega t + \alpha) + mg/k$.

- *Das Fadenpendel:* Die rückstellende Kraft ist in diesem Fall durch $F = -mg \sin \theta$ gegeben, wie die nebenstehende Abbildung zeigt, in der die Schwerkraft in eine radiale (nicht auf die Auslenkung wirkende) und tangential Komponente zerlegt ist. Für die sich auf einem Kreisbogen mit Bogenwinkel ω gewogene Masse gilt also

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad \Leftrightarrow \quad l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0,$$

was sich für kleine Auslenkungswinkel θ durch die Entwicklung $\sin \theta = \theta + O(\theta^2)$ als

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

nähern lässt, so dass $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ ist. Bei größeren maximalen Auslenkungen θ_0 ergibt sich aber

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \dots \right).$$

Die Abweichung gegenüber dem mathematischen Pendel ist kleiner als 1%, wenn $\theta_0 < 2 \arcsin(0.2)$ ist, wie sich leicht nachrechnen lässt. Ein *Sekundenpendel* ergibt sich für $1s = T = 2\pi\sqrt{l/g}$, also für

$$l = \frac{g}{4\pi^2}(1s)^2 = 0.248m.$$

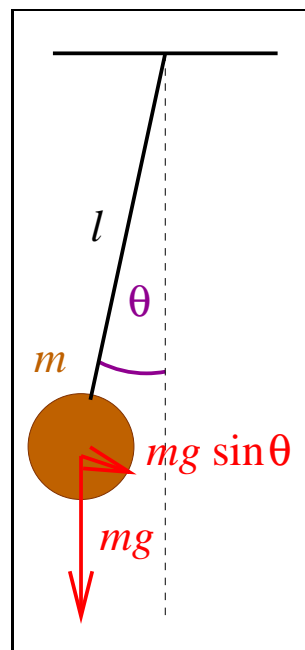


Abb. 2.12 Das Federpendel

Die Parameter a und α lassen sich durch *Anfangsbedingungen* $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v(0)$ bestimmen,

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = a \cos \alpha = x_0 \\ \dot{x}(0) = -a\omega \sin \alpha = v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{-v_0}{x_0\omega},$$

und

$$a^2 = a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \Rightarrow a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Ein anderer Ansatz $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ steht mit dem ersten über $A = a \cos \alpha$ und $B = -a \sin \alpha$ in Beziehung.

2.3.3 Gedämpfte Schwingungen

Erfährt das Federpendel durch den Rührer im Wasser eine Dämpfung, die wie für eine Reibungskraft üblich proportional zur Geschwindigkeit ist, so lautet die Kraftgleichung nun

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.6)$$

wobei wir den Parameter $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ aus dem ungedämpften Fall übernommen (und mit einem Index „0“ versehen), als neuen Parameter aber $\gamma = r/2m$ eingeführt haben. Wir können die Lösung nun entweder raten, etwa in der Form $x = ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$, oder aber durch einen Ansatz

$$x = Ae^{\lambda t}$$

bestimmen, wobei λ im allgemeinen komplexe Werte annehmen kann. Das Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung (2.6) ergibt die *charakteristische Gleichung*, die sich einfach lösen lässt,

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Von dem Vergleich zwischen γ^2 und ω_0^2 hängt es nun ab, ob es zwei reelle oder zwei komplexe Lösungen oder gar nur eine Lösung ist.

- Für $\gamma^2 < \omega_0^2$, d.h. für schwache Dämpfung, sprechen wir vom *Schwingfall*. In diesem Fall sind die Lösungen

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} =: -\gamma \pm i\omega$$

komplex konjugiert zueinander. Die Linearkombination der beiden Lösungen der Differentialgleichung liefert die allgemeine Lösung

$$x(t) = a_+ e^{\lambda_+ t} + a_- e^{\lambda_- t} = e^{-\gamma t} (a_+ e^{i\omega t} + a_- e^{-i\omega t}).$$

Da $x(t)$ eine reelle Funktion sein muss, gilt $a_1 = a_2^* = ae^{i\alpha}/2$ und damit

$$x(t) = \frac{1}{2}ae^{-\gamma t}(e^{i(\omega t + \alpha)} + e^{-i(\omega t + \alpha)}) = ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha).$$

Die Lösung wird auch dann reell, wenn wir die (reellen) Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ verwenden. Es ergibt sich dann

$$a_+ + a_- = x_0, \quad a_+(-\gamma + i\omega) + a_-(-\gamma - i\omega) = v_0$$

und damit

$$a_+ + a_- = x_0, \quad a_+ - a_- = -\frac{i}{\omega}(v_0 + \gamma x_0)$$

oder

$$a_{\pm} = \frac{1}{2} \left(x_0 \mp \frac{i}{\omega}(v_0 + \gamma x_0) \right)$$

Die Lösung mit diesen Anfangsbedingungen ist also

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t}(a_+e^{i\omega t} + a_-e^{-i\omega t}) = \\ &= e^{-\gamma t} \left(\frac{x_0}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - \frac{i}{\omega}(v_0 + \gamma x_0)(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right) = \\ &= e^{-\gamma t} \left(x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \sin(\omega t) \right). \end{aligned}$$

- Für $\gamma^2 = \omega_0^2$ sprechen wir vom *asymptotischen Grenzfall*. In diesem Fall besitzt die charakteristische Gleichung nur eine Lösung $\lambda = -\gamma$. Dennoch bleiben für die Schwingung selbst zwei unabhängige Lösungen, denn $te^{-\gamma t}$ ist ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung. Mit

$$x = te^{-\gamma t}, \quad \dot{x} = e^{-\gamma t} - \gamma te^{-\gamma t}, \quad \ddot{x} = -2\gamma e^{-\gamma t} + \gamma^2 te^{-\gamma t}$$

erhalten wir nämlich (beachte $\omega_0^2 = \gamma^2$)

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x = (-2\gamma + \gamma^2 + 2\gamma(1 - \gamma) + \gamma^2)e^{-\gamma t} = 0.$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$x(t) = (a_0 + a_1t)e^{-\gamma t},$$

und angepasst an dieselben Anfangsbedingungen wie im ersten Fall,

$$x(0) = a_0 = x_0, \quad \dot{x}(0) = -\gamma a_0 + a_1 = v_0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = v_0 + \gamma x_0,$$

die Lösung

$$x(t) = (x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t) e^{-\gamma t}.$$

Der asymptotische Grenzfall ist übrigens für Messgeräte der geeignetste, da sich eine Zeigerstellung nicht erst einschwingen muss, sondern durch asymptotische Dämpfung angestrebt wird.

- Für $\gamma^2 > \omega_0^2$ sprechen wir vom *Kriechfall*. Die Dämpfung ist dann so stark, dass keine Schwingung mehr zustande kommt. Das schlägt sich in zwei reellen Lösungen

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} =: -\gamma \pm \omega'$$

nieder, die zu einer langsam und schnell abfallenden Lösung führen,

$$x(t) = a_+ e^{(-\gamma + \omega')t} + a_- e^{(-\gamma - \omega')t} = e^{-\gamma t} (a_+ e^{\omega' t} + a_- e^{-\omega' t}).$$

Die Anpassung an die Anfangsbedingungen,

$$x(0) = a_+ + a_- = x_0, \quad \dot{x}(0) = a_+(-\gamma + \omega') + a_-(-\gamma - \omega') = v_0,$$

liefert zunächst

$$a_+ + a_- = x_0, \quad a_+ - a_- = \frac{1}{\omega'}(v_0 + \gamma x_0)$$

und damit

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(x_0 \cosh(\omega' t) + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega'} \sinh(\omega' t) \right)$$

mit dem *Cosinus hyperbolicus* $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und dem *Sinus hyperbolicus* $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Übrigens ergibt sich der asymptotische Grenzfall aus dem Kriechfall, wenn wir Letzteren für kleine Werte von ω' entwickeln und dabei ausnutzen, dass $\cosh(\omega' t) \approx 1$, $\sinh(\omega' t) \approx \omega' t$ ist.

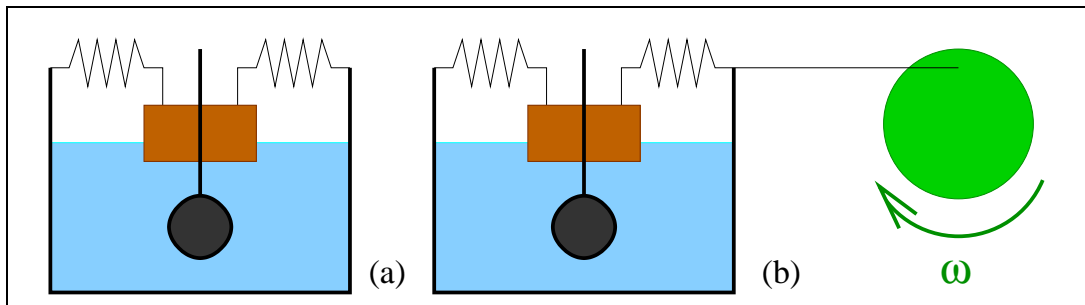


Abb. 2.13 Versuche zur (a) freien und (b) erzwungenen gedämpften Schwingung

2.3.4 Schwingungsexperimente

Ein Schwimmer liegt im Wasser und ist zu beiden Seiten mit einer Feder am Rand befestigt (Abbildung 2.13(a)). Stoßen wir den Schwimmer in Richtung der Federn an, so schwingt der Schwimmer zunächst nahezu dämpfungsfrei. Lediglich die Wirbelstromdämpfung führt zu einem allmählichen Abklingen der Schwingung. Nun können wir durch den Schwimmer hindurch einen Löffel ins Wasser senken. Stellen wir die Löffelfläche zunächst in Richtung der Bewegung, so ist die Schwingung weiterhin nur schwach gedämpft. Stellen wir den Löffel jedoch quer zur Bewegungsrichtung, so gelangen wir je nach Eintauchtiefe des Löffels zum aperiodischen Grenzfall und zum Kriechfall.

Befestigen wir eines der Federenden nicht am Rand, sondern über einen Fadenzug und eine Rolle an einem Exzenter, so können wir damit *erzwungene Schwingungen* beobachten (Abbildung 2.13(b)). Regt der Exzenter die Schwingung mit derselben Frequenz an, mit der die freie Schwingung zuvor geschwungen hat, so beobachten wir eine deutliche Vergrößerung der Auslenkung. Wir sprechen in diesem Fall von *Resonanz*, im ungedämpften Fall gar von einer *Resonanzkatastrophe*, die das schwingende System zerstören kann.

2.3.5 Erzwungene Schwingungen

Zur Berechnung einer erzwungenen Schwingung mit periodischer Kraft $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ ist die inhomogene Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos \theta \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}(\cos \omega t)$$

zu lösen. Als Ansatz wählen wir $x = a \cos(\omega t + \alpha)$, wobei die Parameter a und α nun jedoch von der Anregungsfrequenz ω abhängen. Da die Differentialgleichung reelle Koeffizienten hat, können wir die Rechnung dadurch vereinfachen, dass wir für die Schwingungen komplexe Exponentialfunktionen verwenden, später aber nur den Realteil der Lösung verwenden. Es ergibt sich dann

$$(-\omega^2 + 2i\omega\gamma + \omega_0^2)ae^{i(\omega t + \alpha)} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

oder

$$ae^{i\alpha} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}.$$

Durch Multiplikation dieser Größe mit ihrem komplex Konjugierten ergibt sich

$$a^2 = \frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2},$$

andererseits aber

$$\tan \alpha = \frac{-2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

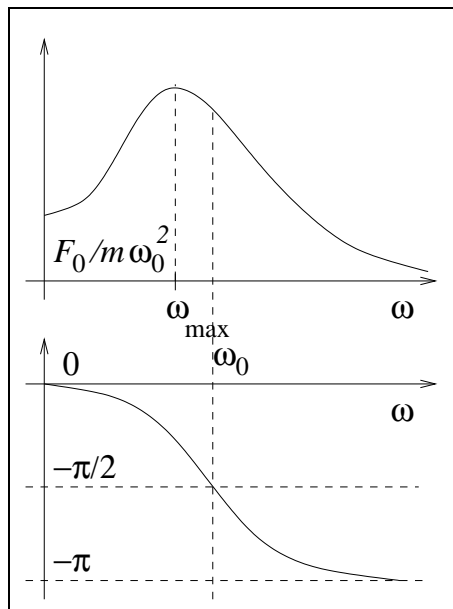


Abb. 2.14 Resonanzkurven

Abbildung 2.14 zeigt a und α als Funktionen der Anregungsfrequenz ω . Deutlich zu erkennen ist die Resonanz bei etwa $\omega = \omega_0$. Ganz stimmt das allerdings nicht. Vielmehr erhält man durch Ableitung von $a(\omega)$ ein Maximum bei $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$. Für $\omega = 0$ fällt die Kurve auf $F_0/m\omega_0^2 = F_0/k$ ab, was auch verständlich ist, denn dann wirkt nur die äußere (konstante) Kraft auf die Feder. Als *Halbwertsbreite* wird der Bereich zwischen den Punkten der Kurve $a(\omega)$ bezeichnet, bei denen das Amplitudenquadrat auf die Hälfte seines Resonanzwertes gesunken ist. Ist γ klein, so ist dieser Bereich sehr schmal. Gleichzeitig kann dann angenommen werden, dass das Maximum der

Resonanzkurve bei $\omega = \omega_0$ liegt. In der Formel

$$a^2 = \frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\gamma^2\omega_0^2} = \frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0 + \omega)^2(\omega_0 - \omega)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}$$

kann $\omega_0 + \omega \approx 2\omega_0$ gewählt werden, und $\omega_0 - \omega$ verschwindet auf der Resonanz. Aus $r^2(\omega_H) = r^2(\omega_0)/2$ ergibt sich

$$\frac{(F_0/m)^2}{4\omega_0^2(\omega_0 - \omega_H)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2} \stackrel{!}{=} \frac{(F_0/m)^2}{8\gamma^2\omega_0^2}$$

oder $(\omega_0 - \omega_H)^2 = 4\gamma^2$, also $\omega_H = \omega_0 \pm \gamma$.

2.3.6 Energiebetrachtungen

Genau umgekehrt, wie sich zuvor die Bewegungsgleichung durch Ableitung der (konstanten) Energie nach der Zeit ergeben hat, so kann man durch Integration wieder auf die Energie kommen. Durch Multiplikation der Bewegungsgleichung mit der Geschwindigkeit \dot{x} erhalten wir

$$m\dot{x}\ddot{x} + m\omega_0^2 x\dot{x} + 2\gamma m\dot{x}^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 \right) + 2\gamma m\dot{x}^2 = 0.$$

Der Klammerausdruck ist die im schwingenden System gespeicherte Energie, die mit der Zeit absinkt, weil durch Reibung dem System Energie verloren geht. Der zweite Anteil ist die Verlustleistung P_V . Der *Gütefaktor*

$$Q = \frac{2\pi \times \text{mittlere gespeicherte Energie}}{\text{Energieverlust pro Schwingung}}$$

kann zur Kennzeichnung der Qualität der Schwingung herangezogen werden. Für die mittlere gespeicherte Energie erhalten wir mit $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt = \frac{1}{2} m x_0^2 \left(\frac{\omega^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt + \frac{\omega_0^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{2} m x_0^2 \left(\omega^2 \frac{\omega}{2\pi} \frac{\pi}{\omega} + \omega_0^2 \frac{\omega}{2\pi} \frac{\pi}{\omega} \right) = \frac{1}{4} m x_0^2 (\omega^2 + \omega_0^2). \end{aligned}$$

Der Energieverlust pro Schwingung ist dagegen

$$\Delta E_V = \int_0^T P_V(t) dt = 2\gamma m x_0^2 \omega^2 \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = 2\pi \gamma m x_0^2 \omega.$$

Damit ergibt sich der Gütefaktor zu

$$Q = \frac{2\pi \cdot \frac{1}{4} m x_0^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{2\pi \gamma m x_0^2 \omega} = \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{4\gamma\omega}.$$

Nahe der Resonanz $\omega \approx \omega_0$ ist $Q = \omega_0/2\gamma$.

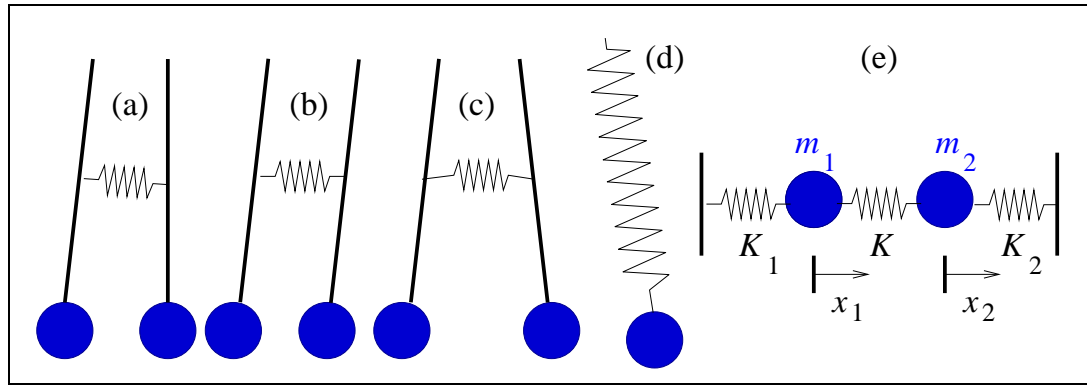


Abb. 2.15 Gekoppelte Pendel (a–c), Federpendel (d) und Federkette (e)

2.4 Vielteilchensysteme

Zwei gleiche Pendel sind durch eine Feder miteinander verbunden (siehe Abbildung 2.15(a)). Lenken wir das eine Pendel aus, so überträgt sich eine Schwingung langsam an das andere Pendel, bis das erste zur Ruhe gekommen ist und das zweite Pendel mit derselben Amplitude schwingt. Lassen wir beide Pendel parallel (b) oder gegeneinander schwingen, so ändert sich an dieser Bewegung nichts. Die Frequenzen sind allerdings geringfügig unterschiedlich. Viel schwieriger wäre es, ein Federpendel (d) zu berechnen – in diesem Fall sind Nichtlinearitäten zu berücksichtigen. Wir machen uns die Sache aber noch einfacher und berechnen statt der gekoppelten Pendel die aus zwei Massen und drei Federn bestehende Federkette (e).

2.4.1 Schwingungen der Federkette

Die Kräftebilanzen liefern für die Federkette die Differentialgleichungen

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k(x_1 - x_2) - r_1 \dot{x}_1,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k(x_2 - x_1) - r_2 \dot{x}_2,$$

wobei x_1 und x_2 die Auslenkungen der Massenpunkte aus ihrer Ruhestellung sind. Diese Gleichungen sind gekoppelt, da sie beide sowohl x_1 als auch x_2 enthalten. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass die Massen gleich sind ($m_1 = m_2 = m$), ebenso die beiden äußeren Federkonstanten ($k_1 = k_2$) und die Reibungskoeffizienten ($r_1 = r_2$). Wir benutzen wie bisher

$$\omega_0^2 := \frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2}, \quad \gamma := \frac{r_1}{2m_1} = \frac{r_2}{2m_2}.$$

Dann lauten das gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \left(\omega_0^2 + \frac{k}{m} \right) x_1 + 2\gamma \dot{x}_1 &= \frac{k}{m} x_2, \\ \ddot{x}_2 + \left(\omega_0^2 + \frac{k}{m} \right) x_2 + 2\gamma \dot{x}_2 &= \frac{k}{m} x_1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.4.2 Eigenschwingungen

Zur Lösung dieses Gleichungssystems wählen wir die beiden Lösungsansätze $x_1(t) = A \exp(i\omega t)$ und $x_2(t) = B \exp(i\omega t)$ und erhalten

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{k}{m} + 2i\gamma\omega\right) A = \frac{k}{m} B, \quad \left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{k}{m} + 2i\gamma\omega\right) B = \frac{k}{m} A.$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist dann lösbar, wenn die Determinante

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{k}{m} + 2i\gamma\omega\right)^2 - \frac{k^2}{m^2}$$

verschwindet. Als Lösungen erhalten wir

$$\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m} - 2i\gamma\omega = \pm \frac{k}{m},$$

also zwei Lösungen:

$$\text{Lösung 1: } \omega_{\pm}^{(1)} = i\gamma \pm \sqrt{\left(\omega_0^2 + \frac{2k}{m}\right) - \gamma^2},$$

$$\text{Lösung 2: } \omega_{\pm}^{(2)} = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Im ungedämpften Fall vereinfachen sich die Lösungen zu

$$\omega_{\pm}^{(1)} = \pm \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m}} \quad \text{und} \quad \omega_{\pm}^{(2)} = \pm \omega_0.$$

Durch Einsetzen in das lineare Gleichungssystem ergibt sich für die Lösung 1 $A = -B$, für die Lösung 2 aber $A = B$. Lösung 1 entspricht also dem Experiment (c), in dem die Pendel parallel schwingen, während Lösung 2 dem Experiment (b) mit Gegenschwingung entsprechen. Die Lösungen (mit Anfangsbedingungen $\dot{x}_i(0) = 0$ und den entsprechenden maximalen Anfangsauslenkungen $x_1(0) = A$, $x_2(0) = \mp A$) lauten

$$\text{Lösung 1: } x_1(t) = A \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m}} t\right) = -x_2(t),$$

$$\text{Lösung 2: } x_1(t) = A \cos(\omega_0 t) = x_2(t).$$

Die beiden Lösungen werden als *Eigenschwingungen* bezeichnet.

2.4.3 Charakteristikenmethode und Schwebung

Das Differentialgleichungssystem (2.7) kann noch auf andere Weise gelöst werden, nämlich durch die *Charakteristikenmethode*. Dazu wird das System erst einmal durch geeignete Addition und Subtraktion entkoppelt. Die Addition liefert

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \left(\omega_0^2 + \frac{k}{m}\right)(x_1 + x_2) - \frac{k}{m}(x_1 + x_2) = 0$$

und damit für $x_+ := x_1 + x_2$ die Differentialgleichung

$$\ddot{x}_+ + \left(\omega_0^2 + \frac{k}{m}\right)x_+ - \frac{k}{m}x_+ = \ddot{x}_+ + \omega_0^2 x_+ = 0.$$

Durch Subtraktion aber erhält man

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2) + \left(\omega_0^2 + \frac{k}{m}\right)(x_1 - x_2) = 0$$

und folglich für $x_- := x_1 - x_2$ die Differentialgleichung

$$\ddot{x}_- + \frac{k}{m}x_- + \left(\omega_0^2 + \frac{k}{m}\right)x_- = \ddot{x}_- + \left(\omega_0^2 + \frac{2k}{m}\right)x_- = 0.$$

Wir erkennen sofort die beiden Frequenzen wieder, die wir schon bei den Eigenschwingungen erhalten hatten, und wir erhalten als Lösungen

$$x_+(t) = A_+ \cos(\omega_0 t + \delta_+), \quad x_-(t) = A_- \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m}} t + \delta_-\right).$$

Diese beiden Lösungen werden als *Charakteristiken* bezeichnet, und aus ihrer Linearkombination setzen sich die Lösungen x_1 und x_2 zusammen,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{A_+}{2} \cos(\omega_0 t + \delta_+) + \frac{A_-}{2} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m}} t + \delta_-\right), \\ x_2(t) &= \frac{A_+}{2} \cos(\omega_0 t + \delta_+) - \frac{A_-}{2} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m}} t + \delta_-\right). \end{aligned}$$

Wie üblich bestimmen die Anfangsbedingungen die Konstanten A_{\pm} und δ_{\pm} . Für $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ ist $\delta_{\pm} = 0$. Wählen wir als Spezialfall den eingangs beim gekoppelten Pendel in Abbildung 2.15(a) Ausgangszustand $x_1(0) = x_0$ und $x_2(0) = 0$, so ergibt sich $A_+ + A_- = 2x_0$ und $A_+ - A_- = 0$, also $A_{\pm} = x_0$. Ferner können wir die Summe über die trigonometrischen Rechenregeln

$$\begin{aligned} \cos \alpha \pm \cos \beta &= \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \pm \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \\ &= \begin{cases} 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\ -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

umschreiben und erhalten so

$$x_1(t) = x_0 \cos\left(\frac{\omega_0}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{2k}{k_1}} - 1\right)t\right) \cos\left(\frac{\omega_0}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{2k}{k_1}} + 1\right)t\right),$$

$$x_2(t) = x_0 \sin\left(\frac{\omega_0}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{2k}{k_1}} - 1\right)t\right) \sin\left(\frac{\omega_0}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{2k}{k_1}} + 1\right)t\right).$$

Der jeweils erste Faktor ist eine langsam veränderliche Funktion, der zweite eine schnell veränderliche. Für $k \ll k_1$ lässt sich die Wurzel entwickeln,

$$\sqrt{1 + \frac{2k}{k_1}} \approx 1 + \frac{k}{k_1}.$$

Damit erhalten wir nahezu freie Schwingungen $\cos(\omega_0 t)$ und $\sin(\omega_0 t)$, deren Amplitude langsam abfällt bzw. ansteigt, wie es in Abbildung 2.16 zu sehen ist, also eine *Schwebung*,

$$x_1(t) = x_0 \cos\left(\frac{\omega_0 k}{2k_1} t\right) \cos(\omega_0 t),$$

$$x_2(t) = x_0 \sin\left(\frac{\omega_0 k}{2k_1} t\right) \sin(\omega_0 t).$$

Wie schon zu beobachten war, geht die Schwingung dabei langsam von dem einen schwingenden Körper zum anderen über.

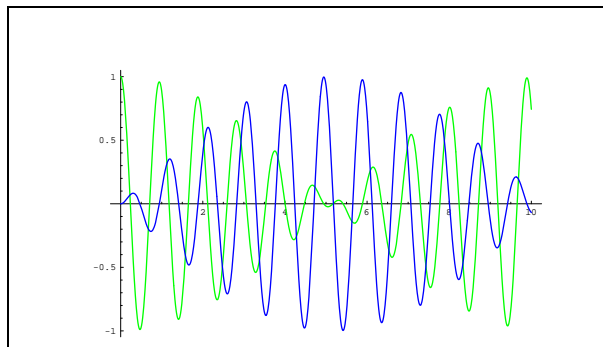


Abb. 2.16 Schwach gekoppeltes schwingendes System

2.4.4 Energiebetrachtungen und Experimente

Die Gesamtenergie des Systems setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen,

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2, \quad E_{\text{pot}} = \frac{k_1}{2}x_1^2 + \frac{k_1}{2}x_2^2 + \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2.$$

Bei gleichphasiger Bewegung (Vorzeichen von x_1 und x_2 gleich) ist die potentielle Energie kleiner als bei gegenphasiger Bewegung, und damit auch die Frequenz. Teilen wir die Gesamtenergie anders auf in

$$E_{\text{ges}} = E_1 + E_2 + E_{\text{WW}}, \quad E_i = \frac{m}{2}\dot{x}_i^2 + \frac{1}{2}(k_1 + k)x_i^2, \quad E_{\text{WW}} = -kx_1x_2,$$

so ist die Wechselwirkungsenergie E_{WW} bei gleichphasiger Schwingung negativ, bei gegenphasiger positiv. Für die beiden Energien E_1 und E_2 erhalten wir im Falle des schwach gekoppelten Systems

$$E_1(t) = \frac{1}{2}k_1x_0^2 \cos^2\left(\frac{k\omega_0 t}{2k_1}\right) (\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)) = \frac{1}{2}k_1x_0^2 \cos^2\left(\frac{k\omega_0 t}{2k_1}\right),$$

$$E_2(t) = \frac{1}{2}k_2x_0^2 \sin^2\left(\frac{k\omega_0 t}{2k_1}\right) (\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)) = \frac{1}{2}k_1x_0^2 \sin^2\left(\frac{k\omega_0 t}{2k_1}\right).$$

Die schnelle Schwingung wirkt nicht auf die Energieveränderung, nur die langsame. Der erste Körper hat dann seine Energie an den zweiten abgegeben, wenn $E_1(t) = 0$. Aus der Nullstellenberechnung erhalten wir

$$\frac{k\omega_0 t}{2k_1} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad t_n = (2n + 1)\pi\frac{k_1}{k\omega_0} \quad \text{und} \quad \Delta t = \frac{2\pi k_1}{k\omega_0}.$$

Als erstes Experiment zu gekoppelten Systemen betrachten wir eine elektrische Schaltung aus Spulen, Kondensatoren und Widerständen (Abbildung 2.17). Die Spulen entsprechen dabei in ihrem Wesen den Massen der Körper, die Kondensatoren den Federn und die Widerstände der Reibung. Lässt sich ein einzelner elektrischer Schwingkreis durch die Differentialgleichung $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = U(t)$ beschreiben, so ist die in Abbildung 2.17 gezeigte Schaltung ganz analog zum eben betrachteten mechanischen System. Das System wird durch einen Rechteckimpuls in Schwingungen versetzt, und die Schwingung wird an einem der Widerstände abgegriffen und auf einem Oszillographen dargestellt. Es ist die (allerdings gedämpfte) Schwebung zu sehen.

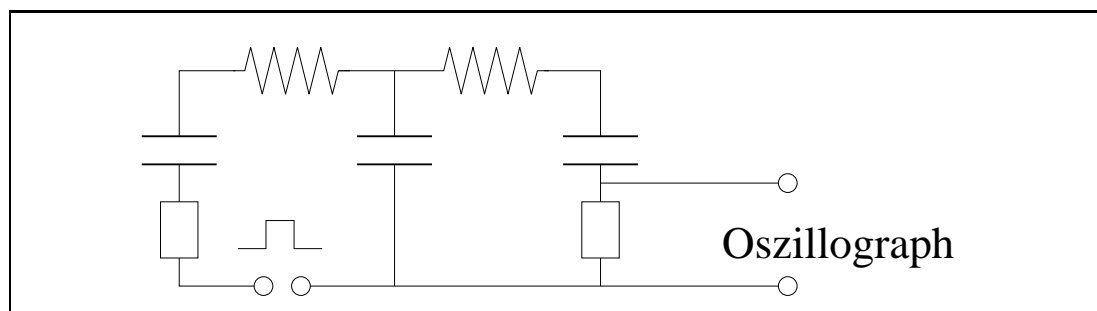


Abb. 2.17 Gekoppeltes elektrisches schwingendes System und seine Messung

In einem zweiten Versuch wird eine Kette von fünf durch Federn miteinander verbundenen Massen durch einen Exzenter zum Schwingen angeregt. Wir beobachten die Schwingungsform bei verschiedenen Drehfrequenzen.

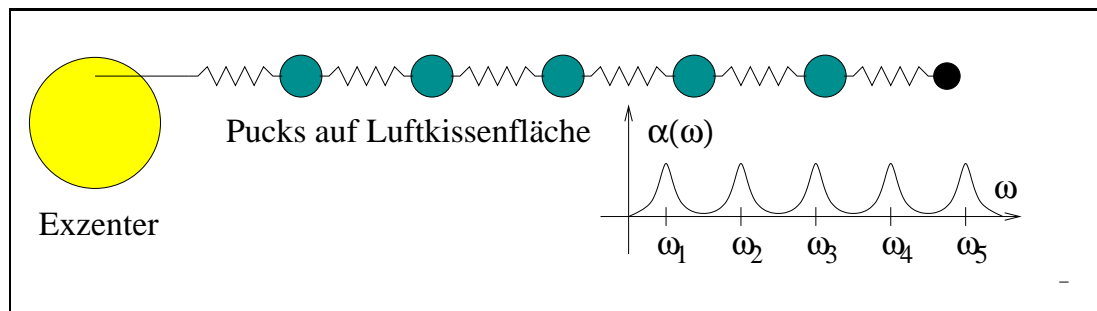


Abb. 2.18 Gekoppelte Kette aus fünf Massen und sechs Federn sowie ein Molekülspektrum

Ganz analog kann die in Abbildung 2.18 rechts dargestellte Absorptionskurve eines mit Licht bestrahlten Moleküls in Abhängigkeit von der Frequenz auf die Vermutung führen, dass das Molekül aus fünf Teilchen besteht – vorausgesetzt allerdings, dass nur eindimensionale Schwingungen möglich sind.

2.5 Symmetrien und Erhaltungssätze

Einer der Grundpfeiler, auf denen die moderne Physik ruht, ist die Beziehung zwischen Symmetrien von Raum und Zeit und den sich daraus ergebenden Erhaltungsgrößen, wie sie von Emmy Noether formuliert worden ist. Nachdem wir uns in diesem Kapitel mit dem Konzept des Potentials vertraut gemacht haben, können wir auf Noethers Aussage etwas genauer eingehen. Für eine konservative Kraft \vec{F}_{12} zwischen zwei Massen an den Orten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 existiert ein Potential, das wir zunächst als $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ schreiben können. Nun gilt aufgrund der Homogenität des Raumes die Translationsinvarianz

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}, \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}),$$

wobei $\Delta\vec{r}$ ein beliebiger Verschiebungsvektor ist. Wir können also beispielsweise auch $\Delta\vec{r} = -\vec{r}_2$ wählen und erhalten

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{0}) =: V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

Daraus leiten sich die beiden Kräfte ab,

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= -\nabla_1 V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\nabla V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \text{und} \\ \vec{F}_2 &= -\nabla_2 V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \nabla V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2),\end{aligned}$$

wobei ∇_i die Gradienten bezüglich \vec{r}_i sind,

$$\nabla_i := \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right),$$

∇ aber der Gradient bezüglich des Argumentes. Wir erhalten $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, also das dritte Newtonsche Gesetz. So wie sich das Zweikörperpotential auf ein Einkörperpotential reduzierte, so vermuten wir, dass durch Wahl eines speziellen Bezugssystems Vereinfachungen eintreten. In diesem Abschnitt betrachten wir daher noch einmal die drei Erhaltungssätze für Impuls, Drehimpuls und Energie unter dem Gesichtspunkt des Schwerpunkts. Wir führen dazu das Schwerpunktsystem ein und zeigen, wie die drei erhaltenen Größen sich entsprechend sinnvoll zerlegen lassen.

2.5.1 Schwerpunkt, Impulssatz und reduzierte Masse

Der *Schwerpunkt* eines Systems von n Massen ist gegeben durch

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Dabei steht „CM“ für das englische *center of mass*, was auf deutsch Schwerpunkt heißt. Beziehen wir uns auf diesen Schwerpunkt, so können wir Ortsvektoren \vec{r}_{CMS} betrachten („CMS“ steht für *center-of-mass system*, also Schwerpunktsystem). Im *Schwerpunktsystem* ist der Ortsvektor \vec{r}_{CM} des Schwerpunktes selbst der Nullvektor, $\vec{r}_{\text{CM,CMS}} = \vec{0}$. Die Frage ist nun berechtigt, ob das

Schwerpunktsystem ein Inertialsystem darstellt. Dazu berechnen wir die Geschwindigkeit des Schwerpunkts im Ausgangssystem,

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\vec{P}}{M}. \quad (2.8)$$

M ist die Gesamtmasse des Systems, \vec{P} aber der Gesamtimpuls. Der Gesamtimpuls eines Systems von Massen ohne äußere Kräfte ist aber konstant, weswegen auch die Geschwindigkeit des Schwerpunktes konstant ist. Im Schwerpunktsystem wiederum ist natürlich $\vec{v}_{\text{CM,CMS}} = 0$ (und entsprechend alle höheren zeitlichen Ableitungen, also auch die Beschleunigung). Wir haben es beim Schwerpunktsystem also in der Tat mit einem Inertialsystem zu tun. Der Gesamtimpuls $\vec{P} = M\vec{v}_{\text{CM}}$ selbst kann nur durch die Wirkung äußerer Kräfte verändert werden,

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}}) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{F}^{\text{ext}},$$

denn nach dem dritten Newtonschen Gesetz ist $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{int}} = \vec{0}$. Betrachten wir wieder ein Zweikörperproblem ohne äußere Kräfte, so gilt

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{1}{m_1} \vec{F}_{12}, \quad \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{1}{m_2} \vec{F}_{21} = -\frac{1}{m_2} \vec{F}_{12},$$

also

$$\frac{d}{dt} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}_{12} = \frac{1}{\mu} \vec{F}_{12}.$$

μ ist die *reduzierte Masse*, die sich für ein System aus n Teilchen gleichermaßen definieren lässt,

$$\frac{1}{\mu} := \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}.$$

Das Zweikörperproblem lässt sich so auf ein Einkörperproblem reduzieren,

$$\vec{F}_{12} = \mu \frac{d\vec{v}_{12}}{dt} = \mu \vec{a}_{12} \quad (\vec{v}_{12} := \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{a}_{12} := \vec{a}_2 - \vec{a}_1).$$

Wir halten fest: die Relativbewegung zweier wechselwirkender Körper ohne äußere Kräfte ist äquivalent zur Bewegung eines Körpers der reduzierten Masse μ unter dem Einfluss der Kraft \vec{F}_{12} in einem Inertialsystem. Dies ist eine bessere Variante als die, dass ich auf dem einen Körper sitze und die Bewegung des anderen Körpers unter der Kraftwirkung betrachte, denn das System dieses Körpers, auf dem ich sitze, ist *kein* Inertialsystem – wohl aber das Schwerpunktsystem, von dem aus dann die Relativbewegung auch betrachtet wird.

2.5.2 Der Drehimpulssatz

Der Gesamtdrehimpuls eines Systems aus n Massen ist gegeben durch

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i),$$

die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses in einem Inertialsystem ist gleich dem gesamten äußeren Drehmoment,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}}) = \sum_{i=1}^n \vec{N}_i^{\text{ext}} = \vec{N}^{\text{ext}}.$$

Erneut betrachten wir zur Veranschaulichung das Zweikörperproblem im Schwerpunktsystem. Die zum Schwerpunkt relativen Koordinaten sind

$$\begin{aligned} \vec{r}_1' &= \vec{r}_1 - \vec{r}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_1 - m_1 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{M} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{m_2}{M} \vec{r}_{12}, \\ \vec{r}_2' &= \vec{r}_2 - \vec{r}_{\text{CM}} = \frac{m_1}{M} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{m_1}{M} \vec{r}_{12}, \quad \vec{r}_{12} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \end{aligned}$$

Im Schwerpunktsystem ist daher

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\text{CMS}} &= m_1 (\vec{r}_1' \times \vec{v}_1') + m_2 (\vec{r}_2' \times \vec{v}_2') = \\ &= -\frac{m_1 m_2}{M} (\vec{r}_{12} \times \vec{v}_1') + \frac{m_2 m_1}{M} (\vec{r}_{12} \times \vec{v}_2') = \\ &= -\mu (\vec{r}_{12} \times \vec{v}_1') + \mu (\vec{r}_{12} \times \vec{v}_2') = \\ &= \mu (\vec{r}_{12} \times (\vec{v}_2' - \vec{v}_1')) = \mu (\vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12}), \end{aligned}$$

wobei wir aus $\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_{\text{CM}}$ und $\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_{\text{CM}}$ für die Differenz der Geschwindigkeiten $\vec{v}_2' - \vec{v}_1' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_{12}$ abgeleitet und verwendet haben. Ohne äußere Kräfte ist der *innere* oder *Eigendrehimpuls* \vec{L}_{CMS} konstant. In einem beliebigen Inertialsystem gilt

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m_1 (\vec{r}_1' \times \vec{v}_1) + m_2 (\vec{r}_2' \times \vec{v}_2) + m_1 \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_2 = \\ &= \vec{L}_{\text{CMS}} + \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{P}. \end{aligned}$$

$\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{P}$ ist der *Bahndrehimpuls*, der im Schwerpunktsystem verschwindet. Durch geschickten Tritt und mit Ausnutzung der Luftreibung gelingt es einem geschickten Fußballspieler, den Eigendrehimpuls in einen Bahndrehimpuls zu verwandeln und damit aus der Ecke des Spielfeldes heraus ins Tor zu schießen. Entsprechend wird auch das Drehmoment in zwei Anteile aufgespalten,

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{N}_{\text{CMS}} + \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F},$$

was verglichen werden kann mit

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_{\text{CMS}}}{dt} + \vec{r}_{\text{CM}} \times \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

Zur Klärung der Frage, ob einer der beiden Drehimpulsanteile (Eigen- oder Bahndrehimpuls) unabhängig vom anderen verändert werden kann, betrachten wir einen elektrischen Dipol im konstanten elektrischen Feld. Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{N}_{\text{CMS}} &= \sum_{i=1}^2 \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \vec{r}_1' \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2' \times \vec{F}_2 = \\ &= \vec{r}_1' \times e\vec{E} - \vec{r}_2' \times e\vec{E} = e\vec{r}_{12} \times \vec{E} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F} &= \sum_{i=1}^2 \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F}_i = \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F}_2 = \\ &= \vec{r}_{\text{CM}} \times (e\vec{E} - e\vec{E}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F}) = 0. \end{aligned}$$

2.5.3 Der Energiesatz

Wieder betrachten wir ein System aus zwei Massen im Einflussbereich der wechselseitigen Zentralkraft und äußerer Kräfte,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1) &= \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_{12}, \\ \frac{d}{dt}(m_2 \vec{v}_2) &= \vec{F}_2^{\text{ext}} + \vec{F}_{21}. \end{aligned}$$

Durch Integration über \vec{r}_1 bzw. \vec{r}_2 erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1 v_{1e}^2 - \frac{1}{2}m_1 v_{1a}^2 &= \int_{\vec{r}_{1a}}^{\vec{r}_{1e}} \vec{F}_1^{\text{ext}}(\vec{r}_1) d\vec{r}_1 + \int_{\vec{r}_{1a}}^{\vec{r}_{1e}} \vec{F}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d\vec{r}_1, \\ \frac{1}{2}m_2 v_{2e}^2 - \frac{1}{2}m_2 v_{2a}^2 &= \int_{\vec{r}_{2a}}^{\vec{r}_{2e}} \vec{F}_2^{\text{ext}}(\vec{r}_2) d\vec{r}_2 + \int_{\vec{r}_{2a}}^{\vec{r}_{2e}} \vec{F}_{21}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d\vec{r}_2. \end{aligned}$$

Dabei sind \vec{r}_{1a} , \vec{r}_{2a} , \vec{r}_{1e} und \vec{r}_{2e} die Anfangs- und Endpunkte der Bewegung der beiden Massen und \vec{v}_{1a} , \vec{v}_{2a} , \vec{v}_{1e} und \vec{v}_{2e} die entsprechenden Geschwindigkeiten. Nach Addition der Gleichungen lässt sich die Energiebilanz umgruppieren zu

$$E_{\text{kin},e} - E_{\text{kin},a} = W^{\text{ext}} + W^{\text{int}},$$

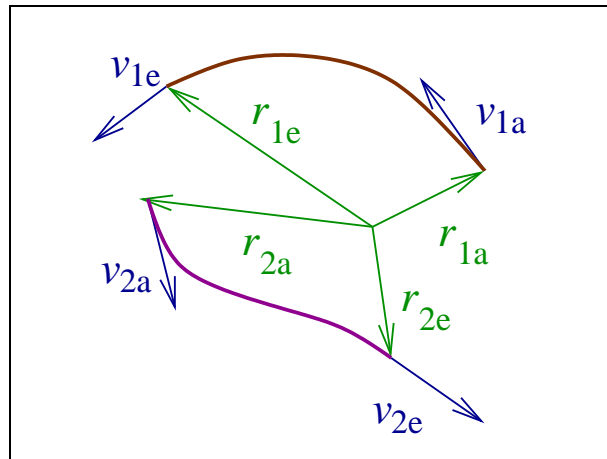


Abb. 2.19 Gekoppelte Bewegungen

d.h. die Änderung der kinetischen Energie des Systems ist gleich der Summe der an ihm verrichteten äußeren und inneren Arbeit. Für letztere erhalten wir

$$\begin{aligned}
 W^{\text{int}} &= \int_{\vec{r}_{1a}}^{\vec{r}_{1e}} \vec{F}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d\vec{r}_1 + \int_{\vec{r}_{2a}}^{\vec{r}_{2e}} \vec{F}_{21}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d\vec{r}_2 = \\
 &= \int_{\vec{r}_{1a} - \vec{r}_{2a}}^{\vec{r}_{1e} - \vec{r}_{2a}} \vec{F}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - \int_{\vec{r}_{1e} - \vec{r}_{2a}}^{\vec{r}_{1e} - \vec{r}_{2e}} \vec{F}_{21}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \\
 &= \int_{\vec{r}_{1a} - \vec{r}_{2a}}^{\vec{r}_{1e} - \vec{r}_{2a}} \vec{F}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + \int_{\vec{r}_{1e} - \vec{r}_{2a}}^{\vec{r}_{1e} - \vec{r}_{2e}} \vec{F}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \\
 &= \int_{\vec{r}_{21a}}^{\vec{r}_{21e}} \vec{F}_{12}(\vec{r}_{21}) d\vec{r}_{21} = V(\vec{r}_{21a}) - V(\vec{r}_{21e}) =: V_a^{\text{int}} - V_e^{\text{int}}.
 \end{aligned}$$

Damit kann die Impulsbilanz umgeschrieben werden zu

$$E_{\text{kin},e} + V_e^{\text{int}} - (E_{\text{kin},a} + V_a^{\text{int}}) =: U_e - U_a = W^{\text{ext}}.$$

Die Änderung der *Selbstenergie* U ist also gleich der äußeren Arbeit. Ist die äußere Kraft zudem konservativ, so kann auch diese durch Potentiale dargestellt werden,

$$\int_{\vec{r}_{ia}}^{\vec{r}_{ie}} \vec{F}_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i) d\vec{r}_i = V_i^{\text{ext}}(\vec{r}_{ia}) - V_i^{\text{ext}}(\vec{r}_{ie}), \quad i = 1, 2.$$

Damit ist die Gesamtenergie

$$E = U + V^{\text{ext}} = E_{\text{kin}} + V^{\text{int}} + \sum_{i=1}^2 V_i^{\text{ext}}$$

eines Systems von Massen konstant. Nun hängt die kinetische Energie ganz offensichtlich vom gewählten Inertialsystem ab. Frage ist daher, ob sich diese Energie wie bisher in einen systemabhängigen und einen systemunabhängigen Anteil auftrennen lassen kann. Mit $\vec{v}_1' = -m_2 \vec{v}_{12} / M$ und $\vec{v}_2' = m_1 \vec{v}_{12} / M$ und $m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = \vec{0}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 E_{\text{kin}} &= \frac{m_1}{2} (\vec{v}_1' + \vec{v}_{\text{CM}})^2 + \frac{m_2}{2} (\vec{v}_2' + \vec{v}_{\text{CM}})^2 = \\
 &= \frac{m_1}{2} \vec{v}_1'^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_2'^2 + m_1 \vec{v}_1' \vec{v}_{\text{CM}} + m_2 \vec{v}_2' \vec{v}_{\text{CM}} + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{v}_{\text{CM}}^2 = \\
 &= \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{2M^2} \vec{v}_{12}^2 + (m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2') \vec{v}_{\text{CM}} + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{v}_{\text{CM}}^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \mu \vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} M \vec{v}_{\text{CM}}^2 = E_{\text{kin,CMS}} + \frac{1}{2} M \vec{v}_{\text{CM}}^2.
 \end{aligned}$$

Die *innere Energie* $E^{\text{int}} = E_{\text{kin,CMS}} + V^{\text{int}}$ eines Systems ist ohne die Wirkung äußerer Kräfte konstant, die Eigenenergie ist $U = E^{\text{int}} + \frac{1}{2} M \vec{v}_{\text{CM}}^2$.

2.6 Die Keplerschen Gesetze

Durch die Überlegungen zum Schwerpunktsystem haben wir im letzten Abschnitt gute Vorarbeit geleistet, um nun einen Blick auf ein konkretes Zweikörperproblem zu werfen, nämlich die in den *Keplerschen Gesetzen* beschriebene Bewegung eines Planeten im Schwerfeld seines Zentralkörpers, also beispielsweise die Bewegung der Erde im Schwerfeld der Sonne. Die auf den deutschen Astronomen **Johannes Kepler** (1571–1630) zurückgehenden Gesetze lauten:

- I. Die Planeten beschreiben Ellipsen,
in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
- II. Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten
überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen der Ellipse.
- III. Die Quadrate der Umlaufzeiten sind proportional
zu den Kuben der großen Halachsen.

Es gib nun zwei verschiedene Zugeweisen zum Verständnis der Keplerschen Gesetze wie zu physikalischen Gesetzen überhaupt: das *induktive Verfahren*, das ausgeht von der beobachteten Kinematik, daraus ein Potential herleitet und ein Kraftgesetz, aus dem sich schließlich die Dynamik ergibt. Daneben gibt es aber auch das heute mehr gebräuchliche *deduktive Verfahren*, bei dem von der Dynamik als bekannt ausgegangen und die Kinematik abgeleitet wird. Wir werden beide Zugänge im folgenden nacheinander verwenden. Da wir beim Keplerproblem vom Fehlen äußerer Kräfte ausgehen können, können wir uns ins Schwerpunktsystem versetzen und die relative Koordinate $\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (\vec{r}_1 ist dabei der Ortsvektor der Sonne, \vec{r}_2 derjenige des Planeten) sowie die relative Geschwindigkeit $\vec{v} := \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ verwenden, ebenso wie die entsprechenden relativen Größen aus dem letzten Kapitel,

den Impuls $\vec{p} = \vec{0}$,

den Drehimpuls $\vec{L} = \mu(\vec{r} \times \vec{v})$

und die Energie $E = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 + E_{\text{pot}}$.

Die Zentriertheit des Problems auf die Sonne legt es nahe, dass im folgenden ebene Polarkoordinaten (r, θ) verwendet werden sollten. Mit $\vec{r} = r\vec{e}_r$ und $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ ergibt sich dann

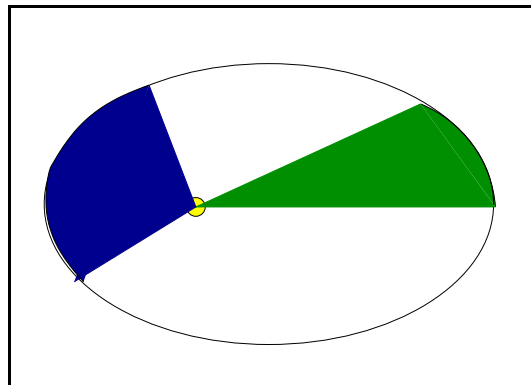


Abb. 2.20 Die Keplerellipse

$$\vec{L} = \mu(r\vec{e}_r \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)) = \mu r^2 \dot{\theta}(\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta) \quad \text{und} \quad (2.9)$$

$$E = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_{\text{pot}}(r) = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + E_{\text{pot}}(r). \quad (2.10)$$

2.6.1 Induktives Verfahren

Das induktive Verfahren ist das ursprünglich von Kepler verwendete. Er las aus den sehr genauen Daten der Marsbahn, die er zusammen mit seinem Lehrer Tycho Brahe aufgenommen hatte, dass die Bahn des Planeten von der Kreisbahn abwich, und errechnete stattdessen eine Ellipsenbahn. Für eine *Ellipse* gibt es nun drei Beschreibungsformen: zum ersten beschreibt sie die Bewegung eines Punktes, dessen Entfernung von zwei anderen Punkten, den *Brennpunkten* der Ellipse, in der Summe konstant ist. Zum zweiten kann man die Ellipse als *Kegelschnitt* betrachten, also den Schnitt eines Kegels mit einer zu seiner Grundfläche leicht geneigten Ebene (ist der Neigungswinkel der Ebene größer oder gleich dem Steigungswinkel des Kegels, so ergeben sich Hyperbeln oder Parabeln). Drittens lässt sich eine Ellipse durch die algebraische Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit *großer Halbachse* a und *kleiner Halbachse* b beschreiben. Für die Herleitung der Keplerschen Gesetze ist aber eine mit dem Kegelschnitt verwandte, quasi vierte Darstellung vorzuziehen: Ellipsen sind Kurven, für die das Verhältnis des Abstandes von einer Geraden zum Abstand von einem Punkt konstant ist.

Abbildung 2.21 zeigt die Situation. Der Punkt P hat dabei einen Abstand PQ zu einer Geraden und einen Abstand PF zum Brennpunkt, und es gilt

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{r}{d - r \cos \theta} = \varepsilon < 1.$$

Umgestellt nach r ergibt sich

$$r = \frac{\varepsilon d}{1 + \varepsilon \cos \theta}.$$

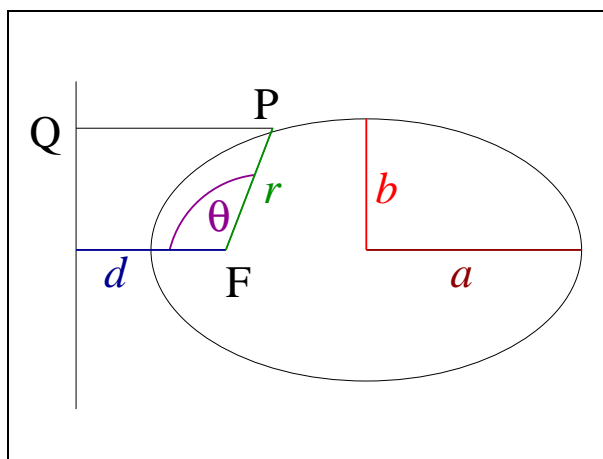


Abb. 2.21 Ellipsenparameter

Der Radius r nimmt seinen minimalen Wert r_{\min} für $\theta = 0^\circ$, seinen maximalen Wert r_{\max} aber für $\theta = 180^\circ$ an. Daraus ergibt sich

$$r_{\min} = \frac{\varepsilon d}{1 + \varepsilon}, \quad r_{\max} = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} = \varepsilon, \quad a = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon^2}$$

(für die Herleitung von $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ ist etwas mehr Aufwand nötig). Für die Keplerschen Gesetze ist nun die Beziehung zwischen dem Radius r und dem Polarwinkel θ wichtig. Dazu leiten wir die umgestellte Gleichung

$$\frac{\varepsilon d}{r} = 1 + \varepsilon \cos \theta$$

nach θ ab und erhalten

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\varepsilon d}{r} \right) = -\frac{\varepsilon d}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon \sin \theta$$

und damit

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 &= \frac{r^4}{d^2} \sin^2 \theta = \frac{r^4}{d^2} (1 - \cos^2 \theta) = \frac{r^4}{d^2} \left(1 - \left(\frac{d}{r} - \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{r^4}{d^2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2d}{\varepsilon r} - \frac{d^2}{r^2} \right) = r^4 \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{\varepsilon^2 d^2} + \frac{2}{\varepsilon r d} - \frac{1}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Dies ist nun zu vergleichen mit Gleichungen (2.9) und (2.10), die umgestellt

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{2}{\mu} \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - E_{\text{pot}} \right), \quad \dot{\theta}^2 = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{L^2}{\mu^2 r^4}$$

und damit

$$\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^{-2} = \frac{2\mu r^4}{L^2} \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - E_{\text{pot}} \right)$$

ergeben. Der Vergleich der Koeffizienten gleicher (negativer) Potenzen des Radius r ergibt die genaue Übereinstimmung des Terms $1/r^2$ sowie (konstante) Gesamtenergie und (vom Radius abhängige) potentielle Energie,

$$E = \frac{L^2}{2\mu d^2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \right), \quad E_{\text{pot}} = \frac{-L^2}{\mu \varepsilon d r}.$$

Interessant ist, dass sich hier aus dem induktiven Ansatz eine $1/r$ -Abhängigkeit der potentiellen Energie ergibt.

2.6.2 Deduktives Verfahren

Moderner als das induktive Verfahren ist eine Herleitung der Ellipsenbahnen aus dem Kraftgesetz und den Anfangsbedingungen, zu denen auch die Erhaltungsgrößen E und L zählen. Wir setzen dazu die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$$

als bekannt voraus und lösen die sich aus den Gleichungen (2.9) und (2.10) ergebende Differential- oder Bewegungsgleichung

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2\mu Gm_1 m_2}{L^2 r} - \frac{1}{r^2}. \quad (2.11)$$

Mit Hilfe der Substitution $\rho = 1/r$ und unter Beachtung von

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{d\rho}{dr} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

können wir die Differentialgleichung umschreiben in

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2\mu G m_1 m_2}{L^2} \rho - \rho^2.$$

Eine erneute Ableitung nach θ liefert

$$2 \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \frac{2\mu G m_1 m_2}{L^2} \frac{d\rho}{d\theta} - 2\rho \frac{d\rho}{d\theta}$$

und damit

$$\frac{d\rho}{d\theta} \left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho - \frac{\mu G m_1 m_2}{L^2} \right) = 0.$$

Die Gleichung ist erfüllt, wenn der Vorfaktor oder der Klammerausdruck verschwindet. Das Verschwinden des Vorfaktors bedeutet, dass ρ in θ konstant ist. Wir behaupten, dass diese Konstante gegeben ist durch $\rho = \mu G m_1 m_2 / L^2 =: \rho_0$ und beweisen dies durch einen Widerspruch. Angenommen also, es sei

$$\rho - \rho_0 = \rho - \frac{\mu G m_1 m_2}{L^2} = \Delta\rho \neq 0.$$

Nach Einsetzen von $\rho = 1/r$ und $L = \mu r^2 \dot{\theta}$ erhalten wir dann aber

$$0 \neq \frac{\Delta\rho L^2}{\mu r^2} = \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{G m_1 m_2}{r^2} = F_Z - F_G.$$

Dies würde bedeuten, dass sich Zentrifugalkraft F_Z und Gravitationskraft F_G nicht die Waage hielten, womit das System instabil würde. Also muss $\Delta\rho = 0$ sein. Das Verschwinden des Vorfaktors führt auf eine Kreisbahn mit Radius $r = L^2 / (\mu G m_1 m_2)$. Was aber ergibt sich aus dem Verschwinden des Klammerausdruckes? Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \rho_0$$

ist die Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Die homogene Differentialgleichung wird gelöst durch $\rho = A \cos \theta + B \sin \theta$, die inhomogene Differentialgleichung aber kann (trivial) gelöst werden durch $\rho = \rho_0$. Die allgemeine Lösung ist also

$$\rho = A \cos \theta + B \sin \theta + \rho_0.$$

Nehmen wir als Anfangsbedingung an, dass die Ableitung des Radius (und damit auch des inversen Radius) bei $\theta = 0$ verschwindet, d.h. dort ein Minimum oder Maximum vorliegt, so ist die Lösung gegeben durch

$$\frac{1}{r} = \rho = \rho_0 + A \cos \theta = \frac{\mu G m_1 m_2}{L^2} + A \cos \theta.$$

Damit haben wir aber die Kegelschnittform der Ellipse reproduziert.

2.6.3 Die drei Konstruktionen der Ellipse

Die algebraische Gleichung der zentrierten Ellipse,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wobei a und b die große und kleine Halbachse sind, lassen sich auf die zuvor schon beschriebenen drei Arten konstruieren. Wir wollen in diesem Abschnitt diese Konstruktionen nachprüfen.

Die Fadenkonstruktion geht von zwei im Abstand e links und rechts des Nullpunktes liegenden Punkten aus, an denen die beiden Enden eines Fadens befestigt sind. Diese Länge lässt sich mit den Halbachsen in Beziehung setzen.

Gerät die Fadenkonstruktion nämlich auf dieselbe Achse, die auch die beiden Punkte verbindet, so ist die Länge des Fadens gegeben durch $l = 2e + 2(a - e) = 2a$. Liegt die Fadenkonstruktion jedoch auf der dazu senkrechten Achse, so gilt nach Pythagoras $a^2 = b^2 + e^2$. Allgemein gilt aber

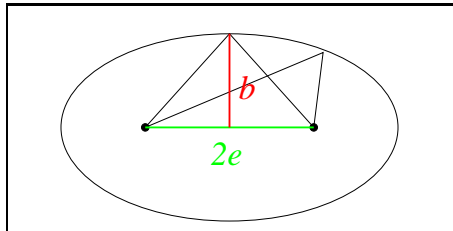


Abb. 2.22 Fadenkonstruktion

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a,$$

und durch zweifache Quadrierung bei zwischengeschobener Separierung der Wurzel ergibt sich schließlich die Ellipsengleichung.

Für die Kegelschnittkonstruktion wählen wir einen Kegel mit Spitze im Ursprung, der einen Öffnungswinkel von 45° habe, und der sich somit durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

beschreiben lässt. Die Schnittebene treffe die Kegelachse in der Höhe z_0 und die Grundebene im Abstand x_0 vom Ursprung parallel zur y -Achse. Ihre algebraische Gleichung ist somit gegeben durch

$$\frac{x}{x_0} + \frac{z}{z_0} = 1.$$

Ineinander eingesetzt erhalten wir somit

$$x^2 + y^2 = \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^2 z_0^2.$$

Für $x_0 = z_0$ ergibt sich daraus $y^2 = 2z_0^2(1 - x/x_0)$ oder $x = x_0(1 - y^2/2z_0^2)$, also eine Parabel. Ist jedoch $x_0 \neq z_0$, so kann die Gleichung umgeformt werden zu

$$\frac{(x_0^2 - z_0^2)^2}{x_0^2 z_0^2} \left(\frac{x}{x_0} + \frac{z_0^2}{x_0^2 - z_0^2}\right)^2 + \frac{x_0^2 - z_0^2}{x_0^2 z_0^2} y^2 = 1,$$

was dann für die Koordinaten (x', y') der Schnittebene mit

$$\frac{x}{x_0} = \frac{x'}{\sqrt{x_0^2 + z_0^2}}, \quad y = y'$$

ergibt

$$\frac{(x_0^2 - z_0^2)^2}{x_0^2 z_0^2 (x_0^2 + z_0^2)} \left(x' + \frac{z_0^2 \sqrt{x_0^2 + z_0^2}}{x_0^2 - z_0^2} \right)^2 + \frac{x_0^2 - z_0^2}{x_0^2 z_0^2} (y')^2 = 1,$$

woraus sich für $x_0 > z_0$ die Quadrate der Halbachsen einer Ellipse errechnen,

$$a^2 = \frac{x_0^2 z_0^2 (x_0^2 + z_0^2)}{(x_0^2 - z_0^2)^2}, \quad b^2 = \frac{x_0^2 z_0^2}{x_0^2 - z_0^2}$$

(für $x_0 < z_0$ ergibt sich eine Hyperbel).

Für die Abstandskonstruktion mit einem Punkt $(d, 0)$ im (senkrechten) Abstand d rechts von der y -Achse als Geraden ist zu fordern

$$\sqrt{(d - x)^2 + y^2} = cx.$$

Durch einfache Quadrierung ergibt sich hier (im Falle $c < 1$)

$$\frac{(1 - c^2)^2}{c^2 d^2} \left(x - \frac{d}{1 - c^2} \right)^2 + \frac{1 - c^2}{c^2 d^2} y^2 = 1,$$

was erneut die Ellipsengleichung darstellt.

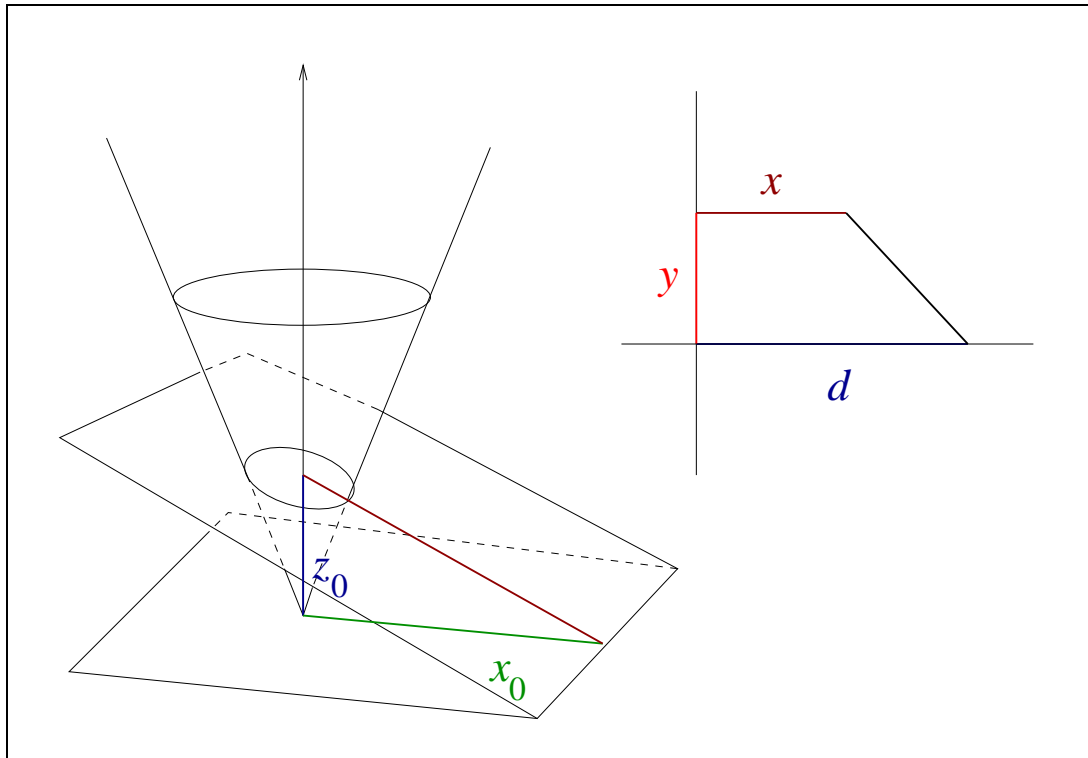


Abb. 2.23 Kegelschnittkonstruktion (links) und Abstandskonstruktion (rechts) der Ellipse

2.7 Dynamik starrer Körper

Ein *starrer Körper* sei zunächst einmal definiert als ein System von Massenpunkten m_i , deren Abstände voneinander sich nicht ändern. Wichtig für den starren Körper sind wieder der Impuls, der Drehimpuls und die Energie. Bewegt sich einer der Massepunkte gleichförmig, so tun dies auch alle übrigen, da sie in festen Abständen aneinander gekoppelt sind. Der Impuls des starren Körpers ist also gegeben als

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{\text{CM}},$$

wobei M die Gesamtmasse und \vec{v}_{CM} die Geschwindigkeit des Schwerpunktes ist. Im allgemeinen aber bewegen sich die Massenpunkte nicht gleichförmig, da an ihnen verschiedene äußere Kräfte angreifen können. In diesem Fall ist die zeitliche Änderung des Drehimpulses durch das Drehmoment

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

gegeben. Die Energie schließlich ist

$$E = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2.$$

2.7.1 Drehung um eine feste Achse

Im Folgenden betrachten wir als Vereinfachung die Drehungen des starren Körpers um eine raumfeste Achse, die durch den Schwerpunkt des Körpers gehen soll, welcher zugleich der Nullpunkt sei. Die Kreisfrequenz ist ω , und der Vektor $\vec{\omega}$ zeigt entsprechend der Regel der rechten Hand in Richtung dieser Achse, während die Geschwindigkeiten der Massepunkte bestimmt sind durch ihre Ortsvektoren \vec{r}_i ,

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i.$$

Es ergibt sich dann für die Energie

$$E = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \quad (2.12)$$

und für den Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i (\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \vec{\omega})). \quad (2.13)$$

2.7.2 Trägheitsmoment und Steinerscher Satz

Als Beispiel betrachten wir die zur Drehachse senkrecht stehende flache Scheibe. Es ist dafür

$$\vec{L} = \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega} = I \vec{\omega}$$

und

$$E = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Dabei ist $I = \sum_i m_i r_i^2$ das *Trägheitsmoment*. Geht die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (\vec{r}_{\text{CM}} + \vec{r}_i)^2 = \\ &= \sum_i m_i r_{\text{CM}}^2 + 2\vec{r}_{\text{CM}} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i + \sum_i m_i r_i^2 = M r_{\text{CM}}^2 + I_{\text{CMS}}. \end{aligned}$$

Dies ist der *Steinersche Satz* (benannt nach dem Schweizer Mathematiker **Jakob Steiner** (1796–1863)), welcher besagt, dass das Trägheitsmoment bestimmt ist durch das Trägheitsmoment im Schwerpunktsystem und die Masse multipliziert mit dem Quadrat des senkrechten Abstandes der Drehachse von der Drehachse durch den Schwerpunkt. Auch für die Energie gilt ähnliches,

$$E = E_{\text{CMS}} + \frac{1}{2} M r_{\text{CM}}^2 \omega^2.$$

Für die flache Scheibe können wir schließlich das Trägheitsmoment um die zur Scheibe senkrechte Achse (wofür wir die z -Achse wählen) mit den Trägheitsmomenten um zwei dazu und untereinander senkrechte Achsen (x - und y -Achse) in Beziehung setzen. Es gilt das *Theorem orthogonaler Achsen*,

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_x + I_y.$$

Betrachten wir den starren Körper als gleichmässige Massenverteilung innerhalb seiner räumlichen Begrenzungen, so geht die Summe über die Massenpunkte über in ein entsprechendes Integral. Wir rechnen dazu ein paar Beispiele:

- i) Beim Ring liegen alle Massenpunkte in einem festen Abstand R zur Drehachse um den Schwerpunkt (der sich selbst nicht im starren Körper befindet). Es gilt daher $I_z = MR^2$ und $I_x = I_y = \frac{1}{2} MR^2$.
- ii) Beim Stab der Länge L , den wir zunächst um sein eines Ende drehen wollen, geht $I = \sum_i m_i x_i^2$ über in

$$I = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{1}{3} ML^2$$

und bei Drehung um den Schwerpunkt nach dem Steinerschen Satz

$$I_{\text{CMS}} = \frac{1}{3}ML^2 - \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{12}ML^2.$$

- iii) Die Scheibe mit Radius R ist aus Ringen der Breite dr aufgebaut. Wir können so das Ergebnis aus (i) übernehmen. Die Masse des Rings der Breite dr ist anteilig gegeben durch

$$dM = M \frac{2\pi r dr}{\pi R^2},$$

also ergibt sich für das Trägheitsmoment

$$I = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{1}{2}MR^2.$$

- iv) Für den Zylinder, der sich wiederum als eine Schichtung von Scheiben entlang der Drehachse darstellen lässt, gilt gleichermaßen $I = \frac{1}{2}MR^2$.
- v) Die Berechnung des Trägheitsmomentes der Kugel schließlich stellt etwas höhere Ansprüche. Sie setzt sich aus Scheiben mit dem Radiusquadrat $r^2(z) = R^2 - z^2$ zusammen, deren Masse gegeben ist als

$$dM = M \frac{\pi r^2(z) dz}{4\pi R^3/3}.$$

Folglich erhalten wir für das Trägheitsmoment aus $dI = \frac{1}{2}r^2(z)dM$

$$\begin{aligned} I &= \frac{3M}{8R^3} \int_{-R}^R r^4(z) dz = \frac{3M}{4R^3} \int_0^R (R^2 - z^2)^2 dz = \\ &= \frac{3M}{4R^3} \int_0^R (R^4 - 2R^2z^2 + z^4) dz = \frac{3M}{4R^3} \left[R^4z - \frac{2}{3}R^2z^3 + \frac{1}{5}z^5 \right]_0^R = \\ &= \frac{3M}{4R^3} (R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{1}{5}R^5) = \frac{2}{5}MR^2. \end{aligned}$$

Körper (Drehachse)	K^2/R^2
Kugel	2/5
Ring	1
Scheibe (Symmetrieachse)	1/2
Scheibe (Achse in der Scheibe)	1/4
Stab (Mitte)	1/12
Vollzylinder (Symmetrieachse)	1/2
Hohlzylinder (Symmetrieachse)	1

In nebenstehender Tabelle ist das Verhältnis des durch

$$I = MK^2$$

definierten *Gyrationradius* zur typischen Ausdehnung des starren Körpers (z.B. zum Radius) angegeben.

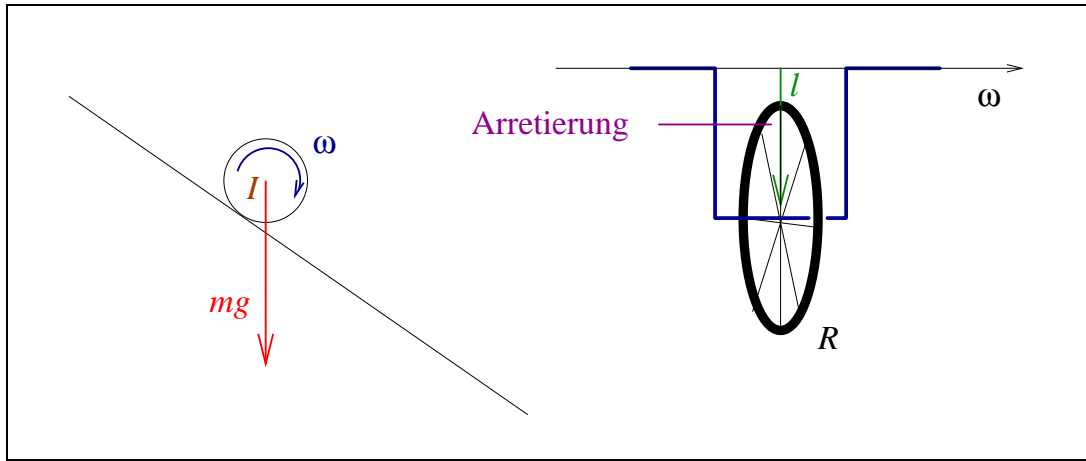


Abb. 2.24 Rollen auf der schiefen Ebene (links) und schwingendes Rad (rechts)

Der Gyrationradius bestimmt auch, wie schnell ein solcher Körper (sofern er rund ist) auf einer schiefen Ebene rollt. Es gilt die Energieerhaltung

$$E_{\text{rot}} + E_{\text{lin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + Mgh = Mgh_0 = \text{konstant},$$

wobei h_0 die Anfangshöhe ist, aus welcher der Körper losgelassen wird. Mit $I = MK^2$ und $v = \omega R$ erhält man durch Umstellung

$$\omega^2 = \frac{2g(h_0 - h)}{R^2 + K^2} \quad \text{oder} \quad v^2 = \frac{2g(h_0 - h)}{1 + K^2/R^2}.$$

Damit ergibt sich beispielsweise für die Kugel $v^2 = \frac{10}{7}g(h_0 - h)$ und für den Hohlzylinder $v^2 = g(h_0 - h)$. Die Kugel rollt also schneller. Schwieriger ist sicherlich die Frage zu beantworten, welche Bedingungen gegeben sein müssen, damit der Körper nicht gleitet. Stattdessen sehen wir uns den nächsten Versuchsaufbau an (vgl. Abbildung 2.24 rechts): ein Rad, das sich frei um eine Achse drehen kann, aber zugleich um eine andere dazu parallele Achse schwingt. Die Drehung des Rades kann unterbunden werden. Die Frage ist, wann das Gestell schneller schwingt. Wir können die Bewegung zweidimensional auffassen. Legen wir den Schwingungspunkt in den Ursprung, so seien \vec{l} der Ortsvektor der Drehachse des Rades und \vec{r}_i die Ortsvektoren der Massenpunkte des Rades, das idealisiert als Ring vom Radius R betrachtet werden soll, es gilt also $\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{l}$ und $|\Delta\vec{r}_i| = R$. Auf die Massenpunkte m_i des Rades wirkt die Schwerkraft $\vec{F}_i = m_i\vec{g}$, und das ausgeübte Drehmoment ist damit

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{g} = M(\vec{l} \times \vec{g}) + \left(\sum_i m_i \Delta\vec{r}_i \right) \times \vec{g}.$$

Der zweite Anteil verschwindet, da sich der Schwerpunkt im Drehpunkt des Rades befindet. Nun betrachten wir den Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

für zwei Fälle:

1. für die freie Achse dreht sich das Rad nicht. Daher gilt $\vec{v}_i = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{l}$ und

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{l} \times \vec{v} + \sum_i m_i \Delta \vec{r}_i \times \vec{v} = M \vec{l} \times \vec{v} = M \vec{l} \times (\vec{\omega} \times \vec{l}) = M l^2 \vec{\omega}$$

und somit $\dot{\vec{L}} = M l^2 \dot{\vec{\omega}} = -M \vec{l} \times \vec{g}$. Durch den Auslenkungswinkel φ ausgedrückt, der klein sein soll, ergibt sich

$$\dot{L} = M l^2 \dot{\varphi} = -M l g \sin \varphi \approx -M l g \varphi$$

und damit eine Schwingung mit Schwingungsfrequenz $\omega_1 = \sqrt{g/l}$ wie ein normales Pendel.

2. für die festgestellte Achse ist $\vec{\omega}_i = \vec{\omega}$ und damit

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega} = \\ &= \sum_i m_i (l^2 + 2\vec{l} \cdot \Delta \vec{r}_i + \Delta r_i^2) \vec{\omega} = M (l^2 + R^2) \vec{\omega}, \end{aligned}$$

also $M (l^2 + R^2) \dot{\varphi} \approx -M l g \varphi$ mit geringerer Schwingungsfrequenz

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{gl}{l^2 + R^2}} < \omega_1.$$

Bisher hatten wir bei symmetrischer Rotation $\vec{L} = I \vec{\omega}$. Im allgemeinen gilt aber

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i).$$

Ist ein Punkt im Körper raumfest, legen wir dorthin den Nullpunkt des Koordinatensystems. Im kräftefreien Fall ist dies der Schwerpunkt. Ist weiterhin $\omega_i = \omega$ für alle Massenpunkte des starren Körpers, so ist

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i (r_i^2 \vec{\omega} - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})) \quad (2.14)$$

eine lineare Beziehung zwischen Drehfrequenz $\vec{\omega}$ und Drehmoment \vec{L} , die sich in Komponenten geschrieben durch eine Matrix ausdrückt,

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

2.7.3 Einführung in die Tensorrechnung

Die soeben dargestellte Matrix hat bestimmte Transformationseigenschaften, die sie als *Tensor*, dem sogenannten *Trägheitstensor* I auszeichnet. Während Skalare wie die Masse m unter Koordinatentransformationen unverändert bleiben (invariant sind), transformieren die Komponenten eines Vektors wie derjenige der Kraft kontravariant zur Basis, die aus den Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besteht (hier in ihrem eigenen Koordinatensystem geschrieben). Das bedeutet, dass der Vektor $\vec{F} = F_1\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3$ selbst unter Transformationen der Basisvektoren unverändert bleibt, die Komponenten sich daher „gegenläufig“ (kontravariant) transformieren.* Die Basis eines Tensors zweiter Stufe, wie wir ihn bei dem Trägheitstensor vorliegen haben, ist gegeben durch die geordneten *äußeren Produkte* $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$. So ist im Gegensatz zum inneren Produkt (Skalarprodukt), z.B.

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

das äußere oder *dyadische Produkt* gegeben durch

$$\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein allgemeiner Tensor lässt sich dann darstellen als Linearkombination solcher *Basistensoren* $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$,

$$A = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$$

(in Fortsetzung der Pfeilnotation für den Vektor kann man den Tensor mit einem Doppelpfeil „ \leftrightarrow “ versehen, was aber hier der Einfachheit halber nicht geschehen soll). Während der Tensor selbst unter Transformationen der Basis unverändert ist, gilt dies nicht für die Komponentendarstellung

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

* Man könnte hier die Konvention mit unteren (kovarianten) und oberen (kontravarianten) Indizes verwenden. Darauf sei aber hier verzichtet.

Ein Spezialfall eines Tensors ist das dyadische Produkt zweier Vektoren,

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j).$$

Während die Summenbildung und die Produktbildung mit Zahlen für alle Komponenten einzeln anzuwenden ist, müssen wir dem rechts- und linksseitigen Produkt mit einem Vektor genaueres Augenmerk schenken. Dazu ist das Skalar- und das dyadische Produkt besser anders zu schreiben, nämlich $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b}$ und $\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \vec{b}^T$. Das Symbol T deutet an, dass aus einem Spaltenvektor ein Zeilenvektor wird, dass der Vektor also transponiert wird. So erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{c} = A\vec{b} &= \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \vec{b} = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j^T \vec{b} = \\ &= \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \vec{e}_i (\vec{e}_j \cdot \vec{b}) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} b_j \vec{e}_i \end{aligned}$$

oder $c^i = \sum_j A_{ij} b_j$. Gleichermaßen gilt

$$\begin{aligned} \vec{d}^T = \vec{b}^T A &= \sum_{i,j=1}^3 \vec{b}^T A_{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \vec{b}^T \vec{e}_i \vec{e}_j = \\ &= \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} (\vec{b} \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^3 b_i A_{ij} \vec{e}_j, \end{aligned}$$

also $d_j = \sum_i b_i A_{ij}$. Beachte, dass i.a. $\vec{d} \neq \vec{c}$ ist, d.h. das Produkt zwischen Tensor und Vektor ist nicht kommutativ (vertauschbar). Für das äußere oder *Tensorprodukt*, also das Produkt zweier Tensoren, das wieder auf einen Tensor führt, erhalten wir mit $A = \sum_{i,j} A_{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$ und $B = \sum_{k,l} B_{kl} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l)$ den Tensor

$$\begin{aligned} C = AB &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 A_{ij} B_{kl} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \sum_{i,j,k,l=1}^3 A_{ij} B_{kl} \vec{e}_i \vec{e}_j^T \vec{e}_k \vec{e}_l^T = \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 A_{ij} B_{kl} \vec{e}_i (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) \vec{e}_l^T = \sum_{i,j,l=1}^3 A_{ij} B_{jl} \vec{e}_i \vec{e}_l^T = \sum_{i,j,k=1}^3 A_{ij} B_{jk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k, \end{aligned}$$

also $C_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk}$. Es werden hier Zeilen mit Spalten skalar multipliziert und das Ergebnis in die Elemente des Tensors C eingetragen. Schließlich gibt es noch ein recht unbedeutendes inneres oder *Skalarprodukt* zweier Tensoren, das auf $(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \cdot (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \delta_{ik} \delta_{jl}$ beruht und für zwei Tensoren A und B den Skalaren $\sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$ liefert.

2.7.4 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen arbeiten wir mit zwei Systemen, nämlich dem raumfesten System S und dem körperfesten System S' . Es gilt

$$\vec{r}' = \sum_{k=1}^3 r'_k \vec{e}'_k(t) = \sum_{k=1}^3 r_k(t) \vec{e}_k = \vec{r}.$$

Dreht sich der Körper mit Drehvektor $\vec{\omega}$ um den Schwerpunkt, so dreht sich das körperfeste System natürlich mit. Es gilt somit für die Geschwindigkeiten

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

und wegen $\vec{v}' = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \\ &= \sum_i m_i (r_i^2 \vec{\omega} - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})) = \sum_i m_i (r_i^2 - \vec{r}_i \otimes \vec{r}_i) \vec{\omega} = I \vec{\omega} \end{aligned}$$

Durch Ableitung nach der Zeit erhalten wir $\dot{\vec{L}} = \dot{I} \vec{\omega} + I \dot{\vec{\omega}}$, wobei

$$\dot{I} \vec{\omega} = \sum_i m_i (2(\vec{r}_i \cdot \vec{v}_i) \vec{\omega} - \vec{v}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) - \vec{r}_i (\vec{v}_i \cdot \vec{\omega})).$$

Wegen $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ verschwinden davon der erste und der letzte Term. Stattdessen ergänzen wir geschickt einen ebenfalls verschwindenden Term $\vec{\omega} \times r_i^2 \vec{\omega}$ und erhalten so

$$\begin{aligned} \dot{I} \vec{\omega} &= \sum_i m_i (\vec{\omega} \times r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})) = \\ &= \vec{\omega} \times \sum_i m_i (r_i^2 \vec{\omega} - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})) = \vec{\omega} \times \vec{L}. \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir die *Eulerschen Bewegungsgleichungen*

$$\dot{\vec{L}} = I \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{N}. \quad (2.15)$$

Als Beispiel betrachten wir einen starren Körper mit diagonalem Trägheitstensor ohne äußere Kräfte ($\vec{N} = \vec{0}$). Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= I_{xx} \dot{\omega}_x + \omega_y L_z - L_y \omega_z = I_{xx} \dot{\omega}_x + \omega_y (I_{zz} - I_{yy}) \omega_z, \\ 0 &= I_{yy} \dot{\omega}_y + \omega_z L_x - L_z \omega_x = I_{yy} \dot{\omega}_y + \omega_z (I_{xx} - I_{zz}) \omega_x, \\ 0 &= I_{zz} \dot{\omega}_z + \omega_x L_y - L_x \omega_y = I_{zz} \dot{\omega}_z + \omega_x (I_{yy} - I_{xx}) \omega_y. \end{aligned}$$

Sind zwei der Elemente des Trägheitstensors gleich, z.B. $I_{xx} = I_{yy}$, so gilt $\dot{\omega}_z = 0$, d.h. ω_z ist konstant. Weiterhin erhält man

$$\dot{\omega}_x + \Omega \omega_y = 0, \quad \dot{\omega}_y - \Omega \omega_x = 0 \quad \text{mit } \Omega = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{xx}} \omega_z.$$

Als Lösung dieses gekoppelten Systems ergibt sich eine *Präzession* der Drehachse mit Winkelgeschwindigkeit Ω um die Vertikale,

$$\omega_x = A \sin(\Omega t), \quad \omega_y = A \cos(\Omega t),$$

wobei allerdings $|\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$ konstant ist.

2.7.5 Trägheitsellipsoid und Hauptachsentransformation

Als nichttriviales Beispiel betrachten wir einen Quader, und die Aufgabe soll es sein, solche raum- und körperfesten Achsen zu finden, um die er sich kräftefrei dreht. Lassen wir den Quader sich mit konstanter Drehfrequenz $\vec{\omega}$ um die z -Achse drehen, so sind die Komponenten des Drehimpulses gegeben durch

$$L_x = I_{xz}\omega_z, \quad L_y = I_{yz}\omega_z, \quad L_z = I_{zz}\omega_z.$$

Die Eulerschen Bewegungsgleichungen lauten

$$N_x = -\omega_z L_y = \dot{L}_x, \quad N_y = \omega_z L_x = \dot{L}_y, \quad N_z = 0 = \dot{L}_z.$$

Nur die z -Komponente des Drehimpulses ist konstant, nicht aber die beiden anderen Komponenten. Um deren zeitliches Verhalten zu bestimmen, leiten wir die Gleichungen noch einmal nach der Zeit ab und erhalten

$$\ddot{L}_x = -\omega_z \dot{L}_y = -\omega_z^2 L_x, \quad \ddot{L}_y = \omega_z \dot{L}_x = -\omega_z^2 L_y.$$

Als Lösung dieser beiden Schwingungsgleichungen erhalten wir

$$L_x = L_\perp \cos \omega_z t, \quad L_y = L_\perp \sin \omega_z t$$

mit $L_\perp^2 = L_x^2 + L_y^2 = (I_{xz}^2 + I_{yz}^2)\omega_z^2$ und $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ konstant. Aus L_x und L_y ergeben sich die *Lagermomente*

$$N_x = -L_\perp \omega_z \sin \omega_z t, \quad N_y = L_\perp \omega_z \cos \omega_z t.$$

Diese Drehmomente versuchen den Körper aus seiner Drehung um die z -Achse herauszutreiben, also aus seiner Drehlagerung – daher auch der Name. Erst wenn diese Drehmomente nicht mehr auftreten, haben wir anscheinend eine Achse gefunden, um welche sich der Körper kräftefrei dreht. Doch was charakterisiert diese Achsen? Zunächst einmal stellen wir fest, dass die Drehenergie bei Drehung um eine feste Achse (wie der eben gewählten z -Achse) gegeben ist durch

$$\begin{aligned} E_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)) = \vec{\omega} \cdot \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \omega I \omega. \end{aligned}$$

Die Rotationsenergie ist also eine quadratische Form in den Komponenten der Drehfrequenz, die in diesem Raum der Drehfrequenzen einen *Ellipsoiden* beschreibt,

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \left(I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 + 2I_{xy} \omega_x \omega_y + 2I_{xz} \omega_x \omega_z + 2I_{yz} \omega_y \omega_z \right)$$

(man beachte, dass der Trägheitstensor symmetrisch ist). Der Drehimpuls steht nun senkrecht auf dieser Fläche, denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial \omega_x} E_{\text{rot}} = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

und gleiches auch für die anderen Komponenten, d.h. der Drehimpuls ist gleich dem Gradienten der Rotationsenergie im $\vec{\omega}$ -Raum. Es ist klar, dass die Drehachsen, um welche sich der Körper kräftefrei dreht, die Hauptachsen des Ellipsoiden sind. In ein solches System gelangt man durch eine *Hauptachsen-transformation*. Diese wird experimentell durch dynamisches Auswuchten erreicht, mathematisch aber durch die Eigenwertgleichung $I\vec{\omega} = \lambda\omega$. Notwendige Bedingung dafür, dass diese Gleichung erfüllt ist, ist das Verschwinden der Determinante

$$\det |I - \lambda E| = \begin{vmatrix} I_{xx} - \lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - \lambda & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

(E ist die Einheitsmatrix). Aus dieser Gleichung dritten Grades für λ bestimmt man die *Eigenwerte* λ_i und die zugehörigen *Eigenvektoren* $\vec{\omega}_i$. Als Rechenbeispiel betrachten wir einen Trägheitstensor

$$I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Aus } \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ergibt sich $0 = (2 - \lambda)^3 - (2 - \lambda) = (2 - \lambda)((2 - \lambda)^2 - 1) = (3 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda)$, also als Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$ und Eigenvektoren

$$\vec{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}_2 = \omega_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}_3 = \frac{\omega_3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Durch diese Eigenvektoren und Eigenwerte ausgedrückt ist die Rotationsenergie gegeben als $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\lambda_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_3\omega_3^2$ oder

$$1 = \frac{\omega_1^2}{2E_{\text{rot}}/\lambda_1} + \frac{\omega_2^2}{2E_{\text{rot}}/\lambda_2} + \frac{\omega_3^2}{2E_{\text{rot}}/\lambda_3},$$

also ein Ellipsoid mit Quadraten $a_1^2 = 2E_{\text{rot}}/\lambda_1$, $a_2^2 = 2E_{\text{rot}}/\lambda_2$ und $a_3^2 = 2E_{\text{rot}}/\lambda_3$ der Halbachsen. Nur bei Drehung um die durch die Eigenvektoren gegebenen Achsen dreht sich der Körper kräftefrei.

Bevor wir uns dem nächsten Experiment zuwenden, wollen wir uns über die Schwingung eines starren Körpers klar werden, dessen Drehachse nicht durch den Schwerpunkt geht, sondern der von der Drehachse einen senkrechten Abstand \vec{l} besitzt. An diesen Schwerpunkt greift ein Drehmoment $\vec{N} = \vec{l} \times m\vec{g}$ an, und in der Näherung kleiner Winkelauslenkungen θ erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$I\ddot{\theta} + mgl \sin \theta \approx I\ddot{\theta} + mgl \theta = 0.$$

Die Schwingungsdauer ist dann

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}.$$

2.7.6 Das Reversionspendel

Mit dem vom deutschen Astronomen, Mathematiker und Physiker **Johann Gottlieb Friedrich von Bohnenberger** (1765–1831) im Jahre 1811 entwickelten Reversionspendel lässt sich die Gravitationsbeschleunigung bestimmen. Wie nebenstehend zu sehen ist, besitzt das Pendel zwei Aufhängungen in Form von Achatschneiden (A und B) und zwei Gewichte, die sich entlang des sie und die Schneiden verbindenden Stabes verschieben lassen. Es seien nun l_A und l_B die Abstände der Schneiden vom Schwerpunkt des ganzen Systems, dessen Lage aber nicht bekannt zu sein braucht. Für das Trägheitsmoment bei Schwingung um die Schneide A gilt nun nach dem Steinerschen Satz $I_A = ml_A^2 + I_{\text{CM}}$, für die Schwingung um die Scheide B aber $I_B = ml_B^2 + I_{\text{CM}}$. Sind die beiden Schwingungsdauern gleich ($T_A = T_B = T$), so muss gelten

$$\frac{ml_A^2 + I_{\text{CM}}}{mgl_A} = \frac{ml_B^2 + I_{\text{CM}}}{mgl_B}.$$

Für diese Gleichung gibt es grundsätzlich zwei Lösungen: eine triviale ($l_A = l_B$) und eine nichttriviale ($l_B = I_{\text{CM}}/ml_A$). Für die nichttriviale Lösung ist der Abstand der Schneiden

$$l = l_A + l_B = l_A + \frac{I_{\text{CM}}}{ml_A} = \frac{ml_A^2 + I_{\text{CM}}}{ml_A}$$

und damit wie bei einem Fadenpendel der Länge l

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml_A^2 + I_{\text{CM}}}{mgl_A}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \Leftrightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = \pi^2 \cdot 0.994 \frac{m}{s^2} = 9.81 \frac{m}{s^2}.$$

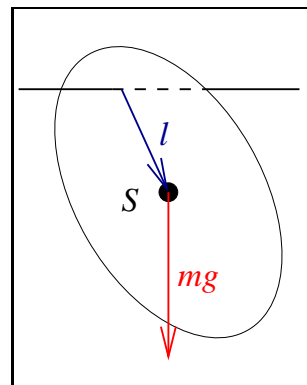


Abb. 2.25 Schwingung

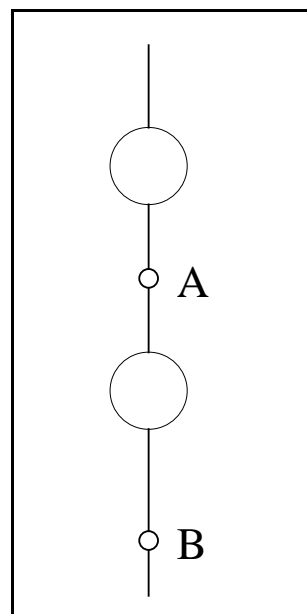


Abb. 2.26 Reversionspendel

2.7.7 Experimente mit Kreiseln

Es können viele Versuche mit Kreiseln durchgeführt werden. Kreisel sind starre Körper, die sich um die Symmetrieachse drehen. Wird der Kreisel auf seiner Spitze aufgesetzt, so wirkt auf ihn die Schwerkraft. Diese führt aber nicht dazu, dass der Kreisel umfällt, sondern sich in einer Kegelbahn um eine zur Schwerkraft parallelen und durch die Spitze gehenden Achse bewegt, *präzediert*. Ist \vec{r}_{CM} der Abstand des Schwerpunktes von der Spitze, so wirkt auf ihn ein auf die Symmetrieachse des Kreisels und die Schwerkraft senkrecht stehendes Drehmoment, das wiederum nach der Eulerschen Bewegungsgleichung gleich dem Vektorprodukt aus Drehfrequenz um die Präzessionsachse und dem Drehmoment des Kreisels ist,

$$\vec{r}_{\text{CM}} \times m\vec{g} = \vec{N} = \vec{\Omega} \times \vec{L}.$$

Da der eingeschlossene Winkel auf beiden Seiten gleich ist, gilt der skalare Zusammenhang $\Omega L = mgr_{\text{CM}}$.

Ist der Kreisel durch eine Ringkonstruktion im Schwerpunkt aufgehängt, so handelt es sich um einen *kräftefreien Kreisel*. Nach dem Drehimpulssatz behält ein solcher kräftefreier Kreisel seine Richtung im Raum bei und kann daher zur Orientierung benutzt werden (Kreiselkompass). Dies wird mit einem Kreisel auf einem Drehschemel demonstriert. Deutlich ist auch, dass es schwer ist, einen Kreisel aus seiner Richtung zu lenken. Er reagiert dabei mit einer Kraft, die senkrecht zur Drehachse und zur Auslenkung gerichtet ist.

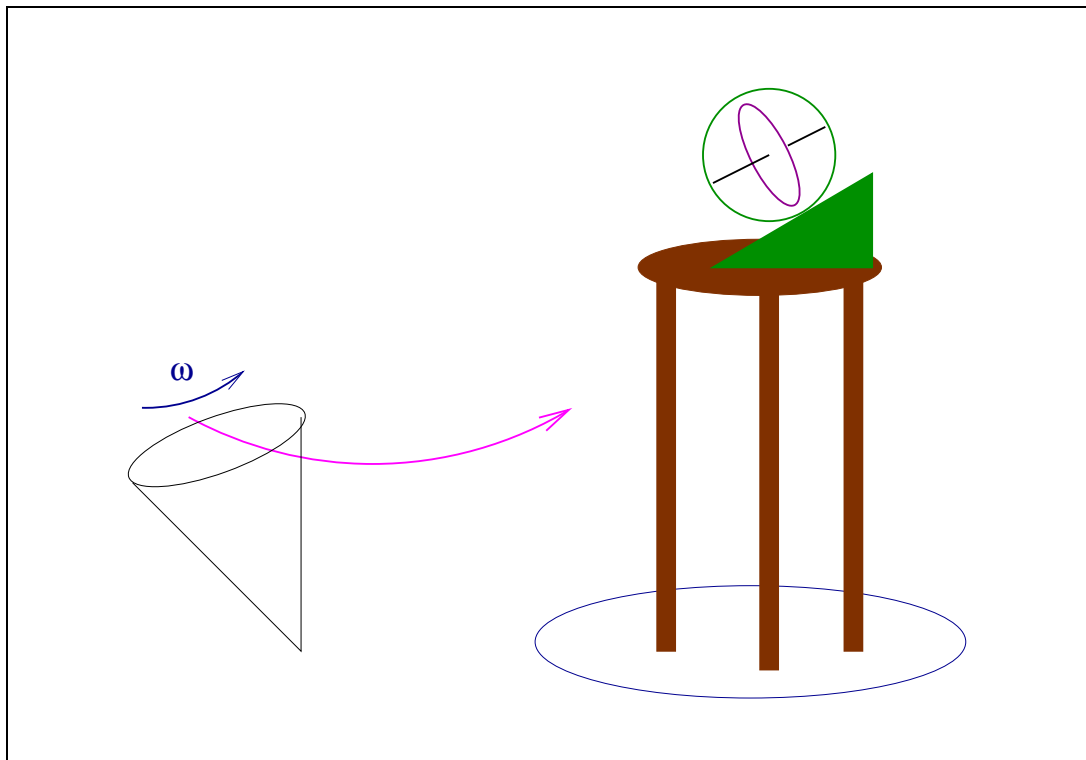


Abb. 2.27 Experimente mit Kreiseln: Aufsatzkreisel, Drehschemel, Orientierung auf der Erde

3. Wärmelehre

Die Dynamik vieler Teilchen haben wir in Form von Schwingungen einer Kette und Drehungen eines starren Körpers kennengelernt. Handelt es sich aber um eine unübersehbare Zahl von Teilchen, so wird der Prozess geeigneter im Rahmen der *kinetischen Gastheorie* beschrieben, für welche wir hier die Grundlagen bilden wollen. Da die Wärme und ihre Übertragung ein wichtiges Beschreibungsmittel für Gase darstellt, bildet die kinetische Gastheorie den Grundstock zur Wärmelehre (in umfassenderer Form auch als Thermodynamik bezeichnet, vgl. die Vorlesung „Thermodynamik und Statistik“ im fünften Semester).

3.1 Kinetische Gastheorie

Die kinetische Gastheorie geht von einer stochastischen Bewegung sehr vieler Teilchen aus. Stochastisch soll heißen, dass die Bewegung zufallsverteilt ist und in alle Richtungen gleichwahrscheinlich ist. Wie aus seiner solchen ungeordneten Bewegung eine makroskopische Beschreibung folgt, erläutern wir an nebenstehendem, links abgeschlossenen Gefäß mit beweglichem Kolben.

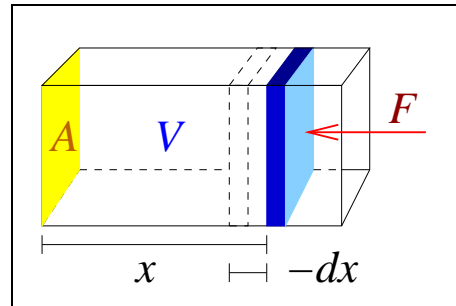


Abb. 3.1 Gefäß mit beweglichem Kolben

Die Masse M des Kolbens sei sehr groß gegenüber der Masse m der Moleküle. Exemplarisch für ein gegen den Kolben stoßendes Molekül gilt der Impulssatz (für die Vektorkomponenten in x -Richtung)

$$mv_{x1} + MV_1 = mv_{x2} + MV_2.$$

Bei elastischem Stoß und für $M \gg m$ ergibt sich $v_{x2} = -v_{x1}$, sofern sich der Kolben vor dem Stoß in Ruhe befindet. Aus dem Impulssatz ergibt sich dann $MV_2 = 2mv_{x1}$ für den auf den Kolben durch ein stoßendes Teilchen ausgeübten Impuls. Es stellt sich nun die Frage, wieviele Teilchen pro Zeiteinheit dt überhaupt stoßen können. Es sind dies Teilchen, die sich im Volumen $dV = Av_x dt$ befinden. Die *Teilchendichte* $n = dN/dV$ zur Hilfe nehmend ergibt sich die Anzahl der Teilchen zu $dN = n dV = nAv_x dt$. Der differentielle Gesamtimpuls dieser Teilchen ist $dp = 2mv_x dN = 2nmAv_x^2 dt$, und Kraft F und *Druck* $P = F/A$ folglich

$$F = \frac{dp}{dt} = 2nmAv_x^2, \quad P = \frac{F}{A} = 2mnv_x^2.$$

Sind wir bis hierher mit einfachen Überlegungen gelangt, so müssen wir nun einsehen, dass nicht alle Geschwindigkeiten, geschweige denn alle x -Komponenten der Geschwindigkeiten gleich sind. Es sind daher *Mittelwerte* $\langle v_x^2 \rangle$ zu bilden. Wegen $\langle (-v_x)^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle$ fällt der Faktor 2 wieder weg, und man erhält

$$P = mn\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3}mn\langle v^2 \rangle,$$

letzteres wegen $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ und $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$. Ausgedrückt durch die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ der als wechselwirkungsfrei angesehenen Teilchen des *idealen Gases* ergibt sich

$$P = \frac{2}{3}n\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{2N}{3V}\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{2}{3V}U_{\text{int}} \quad \Leftrightarrow \quad PV = \frac{2}{3}U. \quad (3.1)$$

Dabei ist U die aus der Summe der kinetischen Teilchenenergien bestehende *innere Energie*.

3.1.1 Ideales Gas und adiabatischer Prozess

Auf das im Volumen V in Abbildung 3.1 eingeschlossene Gas werde nun durch den Kolben Arbeit verrichtet. Das System befindet sich dann in einem *Nichtgleichgewichtszustand*. Die Arbeit ist gegeben durch $dW = -PdV$. Wird die Arbeit dazu verwendet, um die innere Energie des Gases zu erhöhen, ohne dass Wärme frei wird (dazu später mehr), so sprechen wir von einem *adiabatischen Prozess*. Mit dem Ansatz $PV = (\gamma - 1)U$ für die Zustandsgleichung des idealen Gases (die Wahl von $(\gamma - 1)$ als Proportionalitätskonstante ist historisch bedingt und wird in einigen Rechenschritten klar) ergibt sich

$$-PdV = dW = dU = \frac{1}{\gamma - 1}d(PV) = \frac{1}{\gamma - 1}(PdV + VdP).$$

Dies ist äquivalent zu

$$-\gamma PdV = VdP \quad \Leftrightarrow \quad -\gamma \frac{dV}{V} = \frac{dP}{P}.$$

Durch Integration auf beiden Seiten ergibt sich

$$-\gamma \ln V \Big|_{V_a}^{V_b} = -\gamma \int_{V_a}^{V_b} \frac{dV}{V} = \int_{P_a}^{P_b} \frac{dP}{P} = \ln P \Big|_{P_a}^{P_b}$$

und damit

$$-\gamma \ln \left(\frac{V_b}{V_a} \right) = \ln \left(\frac{P_b}{P_a} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{V_b}{V_a} \right)^{-\gamma} = \frac{P_b}{P_a} \quad \Leftrightarrow \quad P_a V_a^\gamma = P_b V_b^\gamma$$

oder

$$PV^\gamma = \text{konstant.} \quad (3.2)$$

Für ein ideales Gas ist $\gamma - 1 = 2/3$, also $\gamma = 5/3$. Für den adiabatischen Prozess eines idealen Gases gilt folglich $PV^{5/3} = \text{konstant}$. In einem (P, V) -Phasendiagramm eingetragen, ergeben sich aus dieser Gleichung Hyperbeln, die wir später zur Diskussion von Kreisprozessen benutzen werden. Diese Kurven werden als *Adiabaten* bezeichnet.

3.1.2 Das Temperaturkonzept

Wir betrachten nun das nebenstehende abgeschlossene System und suchen nach einer Zustandsgröße, welche den Gleichgewichtszustand beschreibt. *Gleichgewicht* besteht dann, wenn wir den beweglichen Kolben herausnehmen können, ohne dass sich diese Zustandsgröße ändert. Wird der Kolben entfernt, so stoßen die Teilchen der beiden Gase unvermittelt aufeinander.

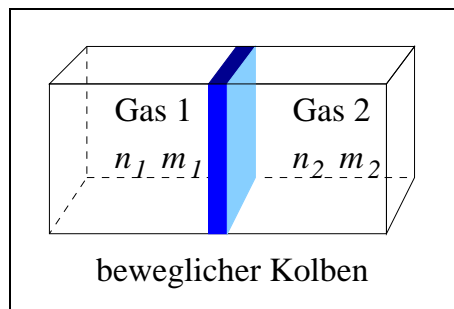


Abb. 3.2 Abgeschlossenes System

Versetzen wir uns ins Schwerpunktsystem zweier stoßender Teilchen, so sind in diesem System alle Stoßrichtungen gleichberechtigt, was bedeutet, dass $\langle (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_{\text{CM}} \rangle = 0$ ist. Mit $\vec{v}_{\text{CM}} = (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) / (m_1 + m_2)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= (m_1 + m_2) \langle (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_{\text{CM}} \rangle = \langle (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) \rangle = \\ &= \langle m_1 \vec{v}_1^2 - m_2 \vec{v}_2^2 + (m_1 - m_2) \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \rangle = \langle m_1 \vec{v}_1^2 \rangle - \langle m_2 \vec{v}_2^2 \rangle, \end{aligned}$$

denn im Mittel ist $\langle \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \rangle = 0$. Damit ergibt sich die Gleichheit der mittleren kinetischen Energien,

$$\left\langle \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 \right\rangle.$$

Die mittlere kinetische Energie ist also für die Teilchen beider Gase gleich und damit die gesuchte geeignete Zustandsgröße, die wir als *Temperatur T* bezeichnen,

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T.$$

Dabei ist $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ die *Boltzmannsche Konstante*. Der Faktor 3/2 ist dazu gewählt, dass die Gasgleichung die einfache Gestalt

$$PV = \frac{2}{3} U = \frac{2}{3} N \langle E_{\text{kin}} \rangle = N k_B T \quad (3.3)$$

annimmt. Zugleich kann man wegen $\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$ sagen, dass jedem *Freiheitsgrad* (als der Bewegung in eine orthogonale Richtung) eine innere Energie $\frac{1}{2} k_B T$ zukommt. Die Gasgleichung (3.3) als Zustandsgleichung des idealen Gases sagt aus, dass bei konstanter Temperatur in einem festen Volumen bei gleichem Druck unabhängig von der Art des Gases gleichviele Teilchen vorhanden sind.

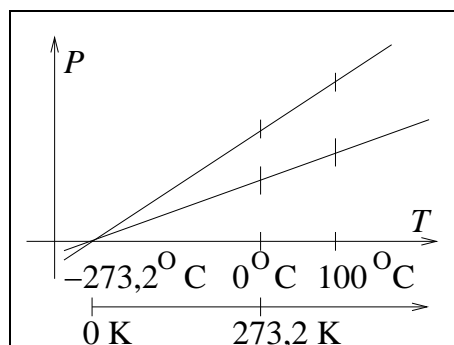


Abb. 3.3 Die Temperaturskala

3.1.3 Eichung der Temperaturskala

Die Zustandsgleichung (3.3) des idealen Gases definiert den Nullpunkt einer *Temperaturskala* durch die Bedingung, dass bei dieser Temperatur der Druck verschwindet (siehe Abbildung 3.3). Eichet man die Temperatur durch den Gefrier- und Siedepunkt des Wassers bei 0°C bzw. 100°C (auf Höhe des Meeresspiegels, auf der ein Normaldruck von einer Atmosphäre herrscht) auf Cesiumgrade (**Andres Celsius**, 1701–1744, schwedischer Astronom, Physiker und Mathematiker), so liegt diese tiefstmögliche Temperatur bei $-273,2^\circ\text{C}$. Es ist daher sinnvoll, eine neue Temperaturskala zu wählen, die bei dieser tiefsten Temperatur ihren Nullpunkt hat. Diese Temperaturskala, die gegenüber der Celsiusskala eine konstante Verschiebung besitzt, ist nach **Lord Kelvin** (mit bürgerlichem Namen **William Thomson**, 1824–1907, irisch-britischer Mathematiker, Physiker und Ingenieur) benannt. Es ist $0^\circ\text{K} = -273,2^\circ\text{C}$ und $273,2^\circ\text{K} = 0^\circ\text{C}$. Daneben gibt es noch andere Temperatureinheiten wie beispielsweise die in den USA gebräuchliche nach **Daniel Gabriel Fahrenheit** (1686–1736, deutsch-niederländischer Physiker und Ingenieur), für welche die symbolische Umrechnung $32^\circ + 1.8^\circ\text{C} = ^\circ\text{F}$ lautet, also $0^\circ\text{C} = 32^\circ\text{F}$ und $10^\circ\text{C} = 50^\circ\text{F}$.

3.1.4 Die barometrische Höhenformel

Unter der Wirkung der Erdanziehung bilden Gase einen von unten nach oben abnehmenden Druck aus, der mit Hilfe der Gasgleichung berechnet werden kann. Gegeben eine Fläche A senkrecht zum Schwerfeld, über der das Gas steht. Wirkt auf der Grundfläche die Kraft $F_u = P_u A = PA$, so ist die Kraft auf eine in der Höhe Δh über der Grundfläche zu denkende Querschnittsfläche um die Schwerkraft der Luftsäule zwischen diesen Flächen vermindert,

$$F_o = P_o A = PA - \Delta mg = PA - mn\Delta V g = PA - mnA\Delta h g.$$

Die Druckdifferenz ist demnach $\Delta P = P_o - P_u = -mn\Delta h g$ und folglich $\Delta P/\Delta h = -mng$, oder differentiell $dP/dh = -mn(h)g$. Ist nun die Temperatur konstant, so ergibt sich aus der Gasgleichung (3.3), dass

$$\frac{PV}{N} = \frac{P(h)}{n(h)} = k_B T = \text{konstant.}$$

Damit gilt

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{P(h)mg}{k_B T} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dP}{P} = -\frac{mg dh}{k_B T}$$

und integriert $\ln(P(h)/P(0)) = -mgh/k_B T$. Durch Exponenzieren ergibt sich schließlich die *Barometrische Höhenformel*

$$P(h) = P(0) \exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right).$$

Im Exponenten steht dabei das Verhältnis aus Gravitationsenergie mgh und thermischer Energie $k_B T$.

3.1.5 Einheiten des Drucks

Der *Druck* eines Gases wie der Luft ist bisher als Kraft pro Fläche eingeführt worden, ohne genauer auf die Einheiten einzugehen. Die wohl natürlichste, wenngleich ungenaueste Einheit ist der *Atmosphärendruck*, in Einheiten *atm*. Er ist insofern ungenau, als die gerade hergeleitete barometrische Höhenformel zeigt, dass dieser Atmosphärendruck abhängig von der geographischen Höhe und natürlich auch von der Temperatur ist. Die Atmosphäre wurde daher durch die metrische Einheit Bar abgelöst, und es gilt $1\text{atm} = 1013\text{mbar}$. Heutzutage wird statt dem Millibar die Einheit Hektopascal, also dem hundertfachen der SI-Einheit *Pascal* verwendet ($1\text{Pa} = 1\text{kg}/\text{ms}^2$, benannt nach dem französischen Physiker und Mathematiker **Blaise Pascal**, 1623–1662).

3.2 Der Begriff der Wärme

Wärme Q wird von einem System aufgenommen, wenn seine Temperatur steigt, ohne dass Arbeit W geleistet wird. Es gilt die Proportionalität

$$\Delta Q = C \Delta T. \quad (3.4)$$

Dabei heißt C die *Wärmekapazität* des Systems ab. Ist ein System so groß, dass sich bei Entnahme oder Zugabe von Wärme die Temperatur nicht ändert, so sprechen wir von einem *Wärmebad* oder *Wärmespeicher*. Im allgemeinen aber gilt ...

3.2.1 Der erste Hauptsatz der Thermodynamik

1. Hauptsatz der Thermodynamik

Bei der Zustandsänderung eines Systems fester Teilchenzahl sei ΔQ die vom System aufgenommene Wärmemenge und ΔW die vom System geleistete Arbeit. Dann gilt für *alle* Zustandsänderungen, deren Anfangs- und Endzustand gleich sind (d.h. Kreisprozesse)

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W. \quad (3.5)$$

3.2.2 Die spezifische Wärme

Man beachte, dass detailliert gleichermaßen $dU = dQ - dW$ gilt, wobei allerdings die beiden Größen auf der rechten Seite keine totalen Differentiale darstellen. Die differentielle Arbeit ist gegeben als $dW = P dV$. Doch was ist die differentielle Wärme? Dazu müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden:

1. Der Druck P und das Volumen V seien unabhängige Größen. Dann ist

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial p} \right)_V dP + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_P dV,$$

aber das Differential der Arbeit und damit das Differential der Wärme ist unbestimmt.

2. Die Temperatur T und das Volumen V seien unabhängige Größen. Dann ist

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

und damit

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + P dV.$$

Wird das Volumen konstant gehalten, so gilt schließlich

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT = C_V dT.$$

Für ein ideales Gas gilt $PV = Nk_B T$ und $U = \frac{3}{2}Nk_B T$, also

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{3}{2}Nk_B.$$

Dies ist die Wärmekapazität bei konstantem Volumen. Dividiert durch die Masse M des Gases wird sie als *spezifische Wärme* $c_V = C_V/M$ bezeichnet. Ihre traditionelle Einheit ist die Kalorie pro Kelvin und Gramm, Cal/Kg . Wasser hat bei $15^\circ C$ die Wärmekapazität 1.0 (was die Kalorie definiert), Aluminium 0.214, Eisen 0.111, Kupfer 0.091 und Gold 0.031.

3. Sind die Temperatur T und der Druck P die unabhängigen Größen, so gilt

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T dP + P \left(\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP \right).$$

Bei konstantem Druck gilt somit

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P dT + p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT = C_P dT,$$

und die Wärmekapazität bei konstantem Druck ist gegeben als

$$C_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P + P \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

Für das ideale Gas gilt erneut

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{3}{2}Nk_B = C_V,$$

Gleichfalls über die ideale Gasgleichung $PV = Nk_B T$ aber

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{Nk_B T}{P}\right)_P = \frac{Nk_B}{P}$$

und damit

$$C_P = C_V + Nk_B = \frac{5}{2}Nk_B.$$

3.2.3 Die Entropie

Was könnte also neben der inneren Energie U noch Zustandsfunktion des Systems sein, also als totales Differential darstellbar? Gewiss ist

$$dQ = C_V dT + \frac{Nk_B T}{V} dV$$

kein Differential, da es keine unabhängige Integration über T und V erlaubt, was Voraussetzung für die Wegunabhängigkeit wäre. Dividiert man jedoch durch die Temperatur T , so ist

$$dS := \frac{dQ}{T} = C_V \frac{dT}{T} + Nk_B \frac{dV}{V} \quad (3.6)$$

durchaus unabhängig integrierbar und damit ein Differential. Das Integral $S = \int dS$ wird als *Entropie* bezeichnet. Wird die Entropie über einen geschlossenen Weg integriert, so ergibt sich eben aus der Eigenschaft der Wegunabhängigkeit

$$\oint dS = \oint \frac{dQ}{T} = 0.$$

Wir sprechen in diesem Fall (eines idealen Gases) von einem *reversiblen Prozess*, der ein System nicht verändert, wenn er periodisch verläuft. Im allgemeinen gilt aber für alle, auch *irreduzible Prozesse* $\oint dS \geq 0$. Es gilt ...

3.2.4 Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik

2. Hauptsatz der Thermodynamik

Es ist unmöglich, eine periodisch arbeitende Maschine zu bauen, deren einzige Funktion darin besteht, ohne Aufwendung äußerer Arbeit Wärme von einem kälteren in ein wärmeres Wärmebad zu pumpen.

3.3 Thermodynamische Prozesse

Der eben genannte zweite Hauptsatz der Thermodynamik verbietet neben dem *Perpetuum Mobile erster Art*, welches aus dem Nichts Arbeit leistet, auch ein *Perpetuum Mobile zweiter Art*, das Wärme in die „falsche“ Richtung transportiert. Aber wie sehen realistische thermodynamische Prozesse aus? Der französische Physiker und Ingenieur **Nicolas Léonard Sadi Carnot** (1796–1832) beschäftigte sich mit dem Energiefluss in einer Dampfmaschine und legte damit die Grundlage zur heutigen Thermodynamik. Im Folgenden behandeln wir den von ihm beschriebenen *Carnotsche Kreisprozess*.

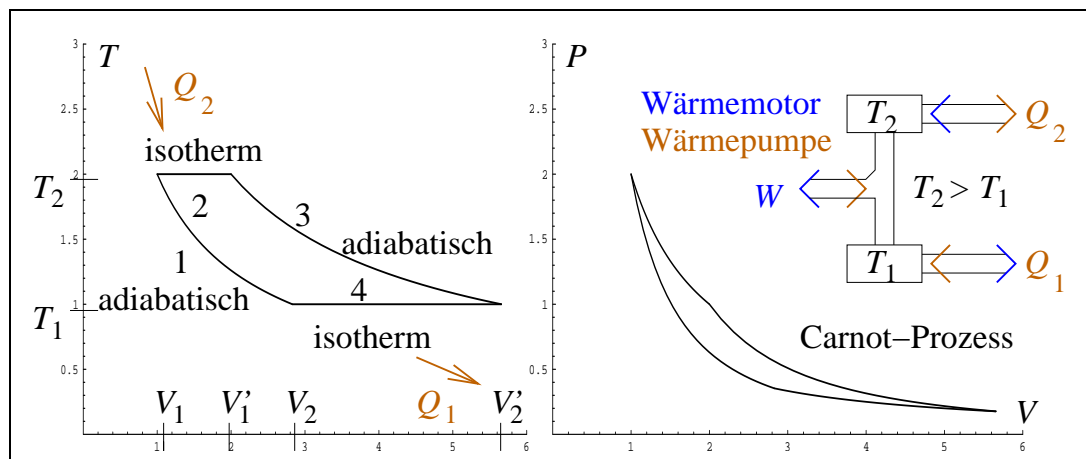


Abb. 3.4 Der Carnotsche Kreisprozess im (V,T) - und (V,P) -Diagramm

3.3.1 Carnotscher Kreisprozess

Der Carnotsche Kreisprozess ist in Abbildung 3.4 dargestellt und besteht aus der zyklischen Abfolge der vier folgenden Vorgänge:

1. Adiabatische Erwärmung von einer Temperatur T_1 auf T_2
2. Isotherme Ausdehnung unter Aufnahme der Wärmemenge Q_2
3. Adiabatische Abkühlung von der Temperatur T_2 auf T_1
4. Isotherme Kompression unter Abgabe der Wärmemenge Q_1

Um diesen Prozess in den Zustandsdiagrammen einzeichnen zu können, muss man wissen, wie sich dort Isotherme und Adiabate darstellen lassen. Im (V,T) -Diagramm sind Isotherme schlicht horizontale Linien (Abbildung 3.4 links). Unter Verwendung der idealen Gasgleichung aber sind Isothermen im (V,P) -Diagramm Hyperbeln der Form $P \sim V^{-1}$ (Abbildung 3.4 rechts). *Isotherme* Zustandsänderungen, also Wärmeaufnahme oder -abgabe bei konstanter Temperatur gelingen nur in einem Wärmebad, von denen der Carnotsche Kreisprozess zwei benötigt. Die adiabatische Zustandsänderung wiederum genügt nach Kapitel 3.1.1 der Gleichung $PV^\gamma = \text{konstant}$ mit $\gamma = 5/3$. Im (V,P) -Diagramm bilden sie steile Hyperbeln $P \sim V^{-\gamma}$, im (V,T) -Diagramm aber erneut über die ideale Gasgleichung nicht ganz so steile Hyperbeln $T \sim V^{1-\gamma}$.

Da das System innerhalb eines Umlaufes keine innere Energie gewinnt, ist die von der Maschine geleistete Arbeit gegeben als $W = Q_2 - Q_1$. Da der Prozess als Kreisprozess reversibel ist (vgl. dazu später), gilt

$$0 = \oint \frac{dQ}{T} = \int_2 \frac{dQ}{T} + \int_4 \frac{dQ}{T} = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1}$$

oder $Q_1/Q_2 = T_1/T_2$. Der *Wirkungsgrad*, also das Verhältnis aus der verrichteten Arbeit W und der hineingesteckten Wärme Q_2 ist

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \leq 1$$

(beachte, dass für die Temperaturen absolute Temperaturen zu wählen sind). Der Carnotsche Kreisprozess erweist sich als derjenige mit dem höchstmöglichen Wirkungsgrad. Der Prozess kann übrigens auch in der umgekehrten Richtung verlaufen. Dann wird dem wärmeren Bad unter Arbeitsaufwand Wärme zugefügt. Man spricht in diesem Fall von einer *Wärmepumpe*. Der Wirkungsgrad ist der Kehrwert von η und damit größer als 1. Für $T_1 = 273K$ und $T_2 = 293K$ ergibt sich ein theoretischer Wirkungsgrad von 14.5. Experimentelle Werte bei Wärmepumpen liegen aber typischerweise zwischen 2 und 5.

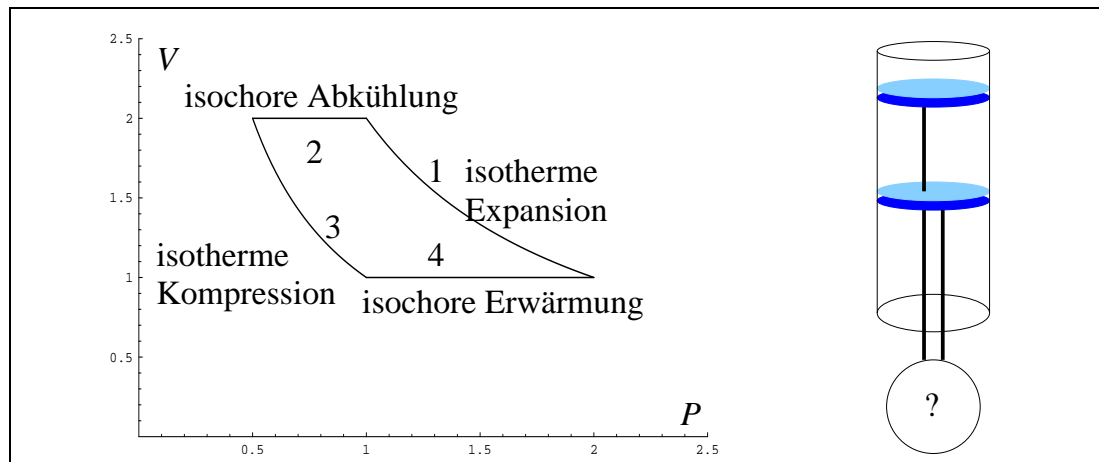


Abb. 3.5 (P,V)-Zustandsdiagramm und Aufbau des Stirlingprozesses

3.3.2 Der Stirlingmotor

Einen etwas anderen Kreisprozess beschreibt der *Stirlingmotor*, entwickelt im Jahre 1816 vom britischen Pastor und Ingenieur **Robert Stirling** (1790–1878). Abbildung 3.5 zeigt links den Prozess im Zustandsdiagramm, rechts den schematischen Aufbau des Motors: in einem Rohr stecken zwei Kolben, zwischen denen ein gasdurchlässiger, aber wärmeundurchlässiger Pfropf aus Kupferwolle liegt, welcher den Bereich niedriger Temperatur T_1 von dem höherer Temperatur T_2 trennt. Der Ablauf des Kreisprozesses, der aus isothermer Expansion und Kompression sowie isochorer Abkühlung und Erwärmung im Wechsel besteht, ist in Abbildung 3.6 zu sehen (allerdings werden in Wirklichkeit die Gestänge der beiden Kolben zu einer Seite herausgeführt und treiben einen komplizierten Exzenter an). *Isochoren* sind Prozesse bei konstantem Volumen. Im (P,V)-Diagramm sind dies horizontale Linien, wie in Abbildung 3.5 links zu sehen.

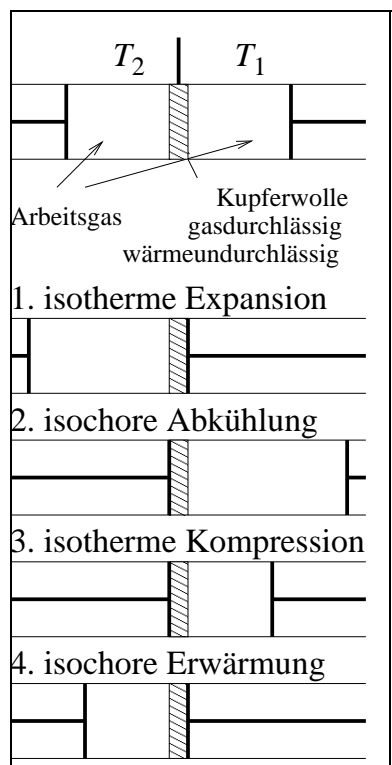


Abb. 3.6 Stirlingmotor (schematisch)

3.3.3 Der Satz von Clausius

Ein Prozess heißt *reversibel*, wenn man auf ihn einen Prozess in umgekehrter Richtung folgen lassen kann, so dass zusammengenommen in der Umgebung keinerlei Veränderungen bleiben. Mit reversiblen und *irreversiblen* Prozessen befasst sich ein Satz, den der deutsche Physiker **Rudolf Julius Emanuel Clausius** (1822–1888) formuliert hat:

Satz von Clausius

Für einen beliebigen Kreisprozess, bei dem zu jedem Zeitpunkt eine Temperatur definiert ist, gilt

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad (3.7)$$

Bei einem reversiblen Kreisprozess ist dieses Kreisintegral gleich Null, und

$$S(B) = S(A) + \int_A^B \frac{dQ}{T} \quad (3.8)$$

ist eine Zustandsfunktion.

Für eine beliebige Zustandsänderung dagegen gilt

$$S(B) \geq S(A) + \int_A^B \frac{dQ}{T},$$

denn schließt man das Integral durch einen reversiblen Prozess und wendet Ungleichung (3.7) an, so folgt mit Gleichung (3.8)

$$\begin{aligned} 0 &\geq \oint \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{dQ}{T} + \int_B^A \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{dQ}{T} + S(A) - S(B) \\ &\Leftrightarrow S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{dQ}{T}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass bei thermischer Isolation (d.h. keinem Wärmeaustausch, also $dQ = 0$) die Entropie mit der Zeit höchstens zunimmt.

3.3.4 Das Gay-Lussacsche Gedankenexperiment

Der französische Chemiker und Physiker **Joseph Louis Gay-Lussac** (1778–1850) hat mit einem Gedankenexperiment den Unterschied zwischen einem reversiblen und einem irreversiblen Prozess klargemacht. Dabei hat er zwei Prozesse miteinander verglichen.

Im ersten Experiment expandiert ein in einem Wärmebad befindliches Gas in einem Rohr gegen einen Kolben, der sich mit einer Feder von einer Wand abstützt. So leistet das Gas bei isothermer Expansion Arbeit an der Feder,

$$\Delta W = \int_{V_0}^{V_1} P dV.$$

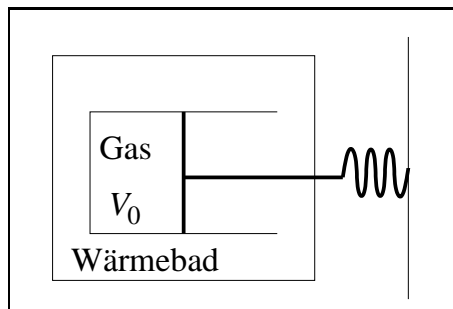


Abb. 3.7 Reversibler Gay-Lussac

Aus der idealen Gasgleichung erhält man dann

$$\Delta W = \int_{V_0}^{V_1} \frac{Nk_B T}{V} dV = Nk_B T \ln \left(\frac{V_1}{V_0} \right).$$

Die dem Wärmebad entzogene Wärmemenge wird in Arbeit umgesetzt, $\Delta Q = \Delta W$, denn es ist $U = U(T)$ und damit bei einem isothermen Prozess wie diesem $\Delta U = 0$. Die Entropieänderungen sind

$$\Delta S_{\text{Gas}} = \frac{\Delta Q}{T}, \quad \Delta S_{\text{Bad}} = -\frac{\Delta Q}{T}, \quad \Delta S_{\text{ges}} = 0.$$

Der Prozess ist reversibel, denn die Federenergie kann genutzt werden, um das Gas wieder zu komprimieren und die Wärmemenge ΔQ an das Wärmebad zurückzugeben.

Im zweiten Experiment expandiert das Gas nicht über den Kolben und die Feder, sondern durch ein sich im Kolben öffnendes Loch in dasselbe Volumen wie vorher. Also ist das Gas im gleichen Zustand wie vorher. Es gilt

$$\Delta S_{\text{Gas}} = \frac{\Delta Q}{T}, \quad \text{aber} \quad \Delta S_{\text{Bad}} = 0$$

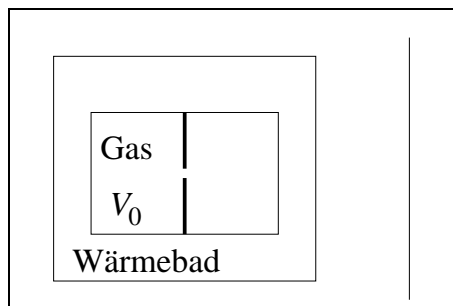


Abb. 3.8 Irreversibler Gay-Lussac

und damit $\Delta S_{\text{ges}} = \Delta Q/T$. Um den Prozess umzukehren, muss das Gas unter Aufwendung der Arbeit $\Delta W = Nk_B T \ln(V_1/V_0)$ komprimiert werden. Dabei wird die Wärmemenge $\Delta Q = Nk_B T \ln(V_1/V_0)$ an das Wärmebad abgegeben. Der zusammengesetzte Prozess verliert also diese Wärmemenge, und es gilt

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0.$$

Irreversible Prozesse verschwenden also nutzbare mechanische Energie.

4. Spezielle Relativitätstheorie

Raum und Zeit sind seit Menschengedenken zwei unterschiedliche Begriffe gewesen, die von ganz unterschiedlicher Wesensart sind. Ein wesentlicher Unterschied, der sogleich ins Auge springt, ist der, dass man sich im Raum (zumindest im Prinzip) in alle Richtungen bewegen kann, aber in der Zeit nur in eine, nämlich in die Zukunft. Die Vergangenheit bleibt unweigerlich hinter uns und wird zur Geschichte, und die Gegenwart ist strenggenommen nur ein Moment. Oder ist des die Zeit, die sich bewegt und verrinnt? Vorgänge laufen natürlich in Raum und Zeit ab, d.h. eine Bewegung im Raum hat eine bestimmte zeitliche Abfolge. Doch sind dabei Raum und Zeit säuberlich voneinander getrennt. Es brauchte schon den genialen Geist eines **Albert Einstein** (1879–1955), um diese beiden miteinander zu verbinden und damit im Jahre 1905 Widersprüche zu beheben, die sich eingestellt hatten.

4.1 Die Vereinigung von Raum und Zeit

Befinden wir uns auf der Erde, so will es den Anschein haben, als sei der Erdboden in Ruhe, und alle Bewegungen ließen sich auf diesen beziehen. Das mag so scheinen, solange man sich nicht mit den Fixsternen und insbesondere den Wandersternen oder Planeten befasst. Ihre von der Erde aus scheinbar verwirrende Bahn lässt sich am besten dadurch beschreiben, dass die Erde selbst sich im Raum (d.h. im Weltall) bewegt. **Nikolaus Kopernikus** (1473–1543), **Tycho Brahe** (1546–1601), **Giordano Bruno** (1548–1600), **Galileo Galilei** (1564–1642), **Johannes Kepler** (1571–1630) und andere bereiteten im ausgehenden Mittelalter dem geozentrischen Weltbild ein Ende und läuteten die Zeit des heliozentrischen Weltbildes ein, in dem die Sonne den Mittelpunkt der Welt darstellte. Doch gibt es ihn überhaupt, den absoluten Raum, gegen den sich jede Bewegung bemerkbar macht? Die Anschauung sagt uns, dass es ihn geben muss, aber diese verwickelt sich dabei in Widersprüche, die letztendlich zur Entstehung der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie führten.

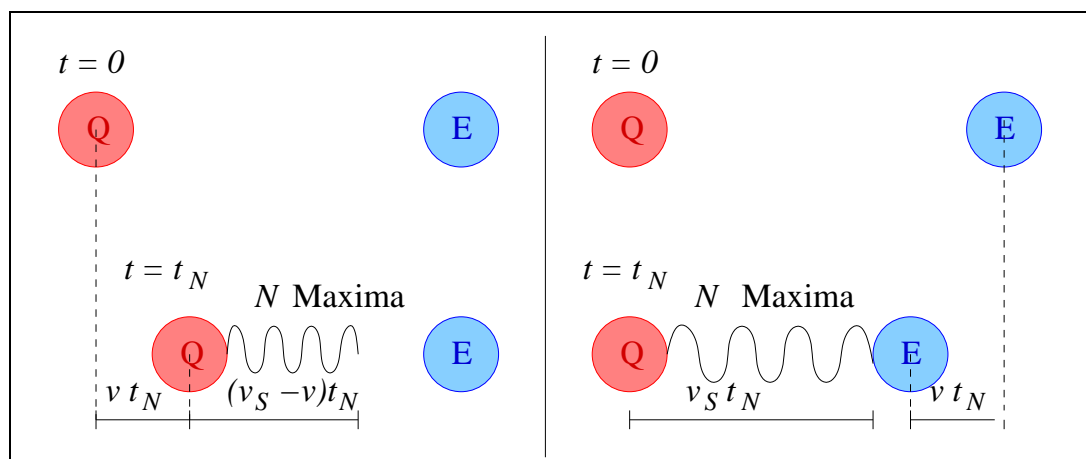


Abb. 4.1 Dopplereffekt mit ruhendem Beobachter (links) oder ruhender Quelle (rechts)

4.1.1 Der Dopplereffekt

Jeder kennt das Phänomen, dass ein vorbeibrausender Feuerwehrwagen von einer höheren Frequenz auf eine tiefere fällt. Wissenschaftlich spricht man hier vom *Dopplereffekt* (**Christian Doppler**, 1803–1853, österreichischer Mathematiker und Physiker). Dazu betrachten wir zunächst einen ruhenden Empfänger, der ein auf ihn zukommendes Feuerwehrauto hört (Abbildung 4.1 links). Das Feuerwehrauto, also die Schallquelle (Q), sende Schall mit einer Frequenz ν_Q aus, d.h. in der Zeit Δt gibt es $N = \nu_Q \Delta t$ Schwingungen in alle Richtungen ab. Die Schallgeschwindigkeit ist in alle Richtungen gleich v_S , aber da sich das Feuerwehrauto bewegt, werden die Schallwellen vor ihm zusammengepresst, hinter ihm jedoch gedehnt. Das bekommt der Empfänger (E), der vor ihm steht, auch deutlich zu spüren: Bewegt sich das Auto mit einer Geschwindigkeit v , so legt es in der Zeit Δt den Weg $v\Delta t$ zurück. Um eben diesen Betrag aber verkürzt sich die Länge des während der Zeit Δt erzeugten Wellenzuges auf $(v_S - v)\Delta t$. Der Empfänger hört also Schall mit einer verminderten Wellenlänge $\lambda_E = (v_S - v)\Delta t/N$ und damit einer erhöhten Frequenz

$$\nu_E = \frac{v_S}{\lambda_E} = \frac{v_S}{v_S - v} \frac{N}{\Delta t} = \frac{\nu_Q}{1 - v/v_S}.$$

Anders sieht es aus, wenn die Schallquelle ruht und der Empfänger sich auf sie zubewegt (Abbildung 4.1 rechts). Zum besseren Vergleich geschehe das wieder mit der Geschwindigkeit v . Während der Zeit Δt , in der die Schallquelle N Wellenzüge ausgesandt hat, hat sich der Empfänger ihr um eine Strecke $v\Delta t$ genähert. Statt eines Wellenzuges der Länge $v_S\Delta t$ hat er während dieser Zeit einen um diese Wegstrecke längeren Wellenzug mit entsprechend mehr Wellen empfangen. Die von ihm gemessene Frequenz ist also gemäß Dreisatz

$$\nu_E = \frac{v_S + v}{v_S} \nu_Q = \left(1 + \frac{v}{v_S}\right) \nu_Q.$$

Beide Ausdrücke weisen auf eine Frequenzerhöhung hin, die ja auch beobachtet wird: der Ton wird höher. Da die beiden Ausdrücke jedoch unterschiedlich ausfallen, kann man unterscheiden, ob sich die Quelle oder der Empfänger bewegt. Das Bezugssystem wird dabei durch die Luft gegeben, in der sich die Schallwellen ausbreiten.

4.1.2 Das Experiment von Michelson und Morley

Im Jahre 1887 unternahmen der deutschstämmige, amerikanische Physiker **Albert Michelson** (1852–1931) und sein Landsmann, der Chemiker **Edward Morley** (1838–1923) einen bahnbrechenden Versuch. Sie wollten herausfinden, ob es so etwas gäbe wie einen Träger für die elektromagnetischen Wellen, von denen Maxwells Theorie vorhersagte, dass sie sich (zumindest im luftleeren Raum) mit konstanter Geschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ bewegen sollten. Der britische Physiker **James Clerk Maxwell** (1831–1879) hatte Gleichungen aufgestellt, die eine Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen vorhersagten, und

solche waren neben jeder Art von Radiowellen auch das Licht. Es schien klar zu sein, dass das Licht nicht in allen zueinander bewegten Systemen dieselbe Geschwindigkeit haben konnte, und daher nahm man eher widerstrebend an, dass es so etwas wie einen Lichtträger, den *Äther*, geben sollte, von dem man eigentlich nicht viel wusste.

Der Versuchsaufbau bestand aus einem Spiegelsystem mit vier exakt gleich langen, senkrecht zueinander stehenden Lichtwegen (siehe Abbildung 4.2). Das Licht aus einer kohärenten Lichtquelle wurde durch eine in der Mitte stehenden, um 45° gegen die Lichtwege geneigte Glasplatte aufgespalten und kam dadurch nach Zurücklegung zueinander senkrecht stehende Lichtwege schließlich auf einer Photoplatte zur Interferenz. Damit konnte festgestellt werden, ob beide Lichtwege in derselben Zeit zurückgelegt worden waren.

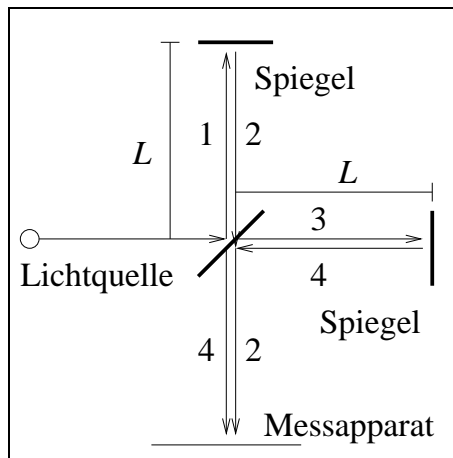


Abb. 4.2 Michelson–Morley-Experiment

Angenommen, der Versuchsaufbau bewege sich mit einer Geschwindigkeit v gegenüber dem Äther nach rechts. Dann würde sich das Licht auf dem Lichtweg 3 gegen den Äther bewegen, auf dem Lichtweg 4 aber durch den Äther mitgenommen werden. Ist L die Länge eines jeden der vier Lichtwege, so würde gelten $ct_3 = L + vt_3$ und $ct_4 = L - vt_4$ und folglich

$$t_3 = \frac{L}{c - v}, \quad t_4 = \frac{L}{c + v} \quad \Rightarrow \quad t_3 + t_4 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}.$$

Aber auch auf den zur hypothetischen Bewegung senkrecht stehenden Lichtwegen 1 und 2 wäre ein Effekt zu bemerken, denn da sich die Versuchsapparatur unter dem Äther fortbewege, wären die Längenquadrate der Lichtwege nach Pythagoras gegeben durch $c^2 t_i^2 = L^2 + v^2 t_i^2$ ($i = 1, 2$) und damit

$$t_1 = t_2 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad \Rightarrow \quad t_1 + t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \neq t_3 + t_4.$$

Im Experiment erhielt man aber, egal in welche Richtung die Arme gedreht wurden, stets $t_1 + t_2 = t_3 + t_4$, denn das Interferenzmuster blieb immer gleich.

4.1.3 Lorentztransformationen

Nach dem Fehlschlag des Michelson–Morley-Experimentes gab es verschiedene Versuche, die Äthertheorie zu retten. Der niederländische Physiker **Hendrik Antoon Lorentz** (1853–1925) beispielsweise nahm 1892 an, dass sich bei Bewegung gegen den Äther die Längen in Bewegungsrichtung verkürzten und auch die Zeiten sich änderten. Richtig klar wurde die Sache aber erst durch Einsteins mutigen Schritt, die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und die Gleichwertigkeit aller zueinander gleichförmig bewegter Systeme (*Inertialsysteme*) zu postulieren und daraus Beziehungen für Längen- und Zeitskalen zu bestimmen. Auf diesem Wege kam es zur Wiederentdeckung der Lorentztransformationen.

Ausgangspunkt unserer Überlegungen soll hier die Tatsache sein, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen dieselbe sein soll, sich also alle Wellenfronten kugelförmig ausbreiten mit $c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Eine Galileitransformation $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$ in ein dazu mit der Geschwindigkeit v in x -Richtung bewegtes System bricht jedoch mit dieser Regel, denn es gilt

$$c^2 t^2 = c^2 t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 - 2xvt + v^2 t^2 + y^2 + z^2 \neq x^2 + y^2 + z^2.$$

Zumindest das gemischte Glied $-2xvt$ lässt sich durch eine Veränderung in x nicht beseitigen. Wir versuchen daher, auch die Zeit zu verändern und wählen den Ansatz $t' = t + \alpha x$. Es ergibt sich

$$c^2 t^2 + 2c^2 \alpha x t + c^2 \alpha^2 x^2 = x^2 - 2xvt + v^2 t^2 + y^2 + z^2.$$

Der gemischte Term verschwindet nun für $\alpha = -v/c^2$. Eingesetzt ergaltn wir jedoch weiterhin nicht die kugelförmige Wellenfront, sondern

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (c^2 t^2 - x^2) = y^2 + z^2.$$

Es scheint so, als müsse sowohl die Koordinate x wie auch die Zeit noch normiert werden, und zwar durch denselben Faktor. Mit

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.1)$$

ergibt sich schließlich $c^2 t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. Die in (4.1) geschriebene Transformation ist die Lorentztransformation für ein sich mit der Geschwindigkeit v in positiver x -Richtung gegenüber dem Ausgangssystem S bewegendes System S' . Die Transformation kann umgekehrt werden und liefert

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.2)$$

4.1.4 Längenkontraktion

Die beiden durch die Lorentztransformation verbundenen Inertialsysteme staten wir nun in Gedanken zu primitiven Laboratorien aus, indem wir Längenskalen (v.a. in der relativen Bewegungsrichtung) anbringen. Da sich aber auch die Zeit beim Übergang vom einen zum anderen System ändert, müssen die dichtgestaffelten Messstationen zusätzlich mit Zeitmessern ausgestattet werden, die vor dem Beginn der Messreihe aufeinander abgestimmt, also synchronisiert werden. Ist jedes Laboratorium so vorbereitet, so können wir einige Messungen durchführen. Gegeben sei beispielsweise ein Stab im System S' in x -Richtung der Länge $L' = x'_2 - x'_1$, der von x'_1 bis x'_2 reiche. Nun ist es Aufgabe der Experimentatoren in System S festzustellen, wie lang dieser Stab für sie ist.

Die Messung der beiden Endpunkte hat (im System S) natürlich zum selben Zeitpunkt t_0 stattzufinden. Aus den Lorentztransformationen (4.1) erhält man

$$L' = x'_1 - x'_2 = \frac{x_1 - ct_0 - x_2 + ct_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Leftrightarrow L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L'.$$

Die gemessene Länge L erscheint also gegenüber der vorgegebenen Länge L' verkürzt. Aber heißt das nicht, dass im System S' ein Stab der Länge L dann mit Länge L' erscheint, also verlängert? Keineswegs, denn verwenden wir die umgekehrten Lorentztransformationen (4.2) zu einem bestimmten Zeitpunkt t'_0 der Messung im System S' , so gilt

$$L = x_1 - x_2 = \frac{x'_1 + ct'_0 - x'_2 - ct'_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{L'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

und damit $L' = \sqrt{1 - v^2/c^2} L$ ebenfalls verkürzt. Längen eines bewegten Systems erscheinen also in Bewegungsrichtung verkürzt. Man spricht von *Längenkontraktion*. Misst man nicht nur eindimensionale, sondern räumliche dreidimensionale Objekte, so tritt subjektiv an die Stelle der Längenkontraktion eine scheinbare Verdrehung der Objekte. Auch dies gilt in beide Richtungen symmetrisch. Das Geheimnis dieser seltsamen Symmetrie liegt darin begründet, dass die *Gleichzeitigkeit* der Messung im einen System nicht identisch ist mit der Gleichzeitigkeit der Messung im anderen System.

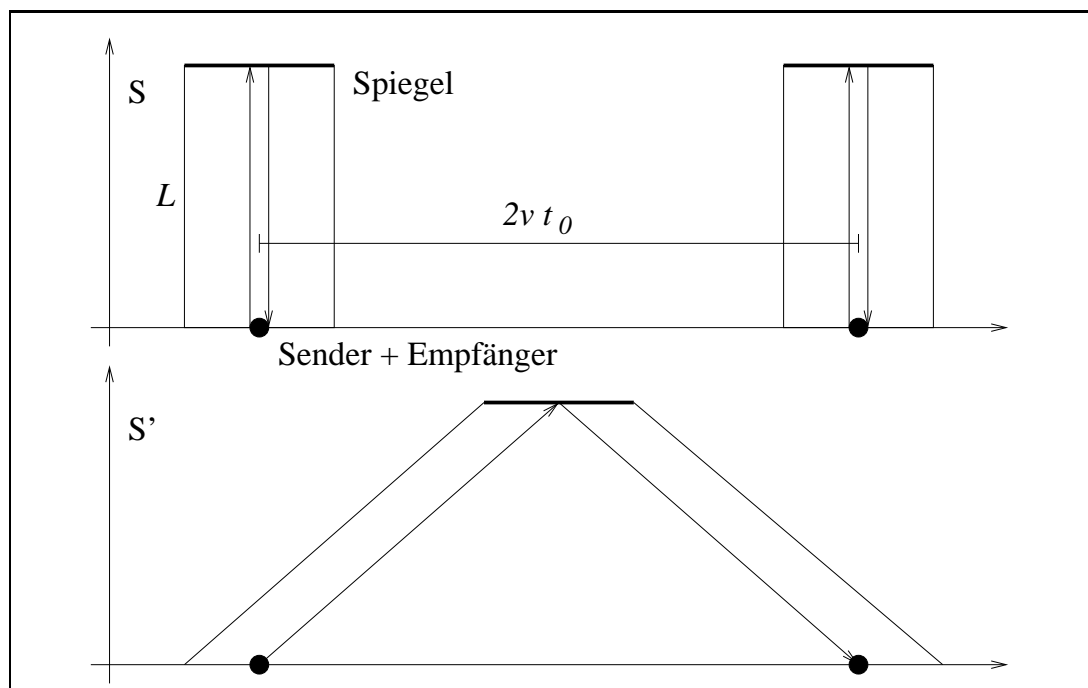


Abb. 4.3 Zwei Inertialsysteme S und S' mit Zeitmessgeräten und Längenskalen

4.1.5 Zeitdilatation

Um die Auswirkungen der Lorentztransformationen auf Zeitmessungen bestimmen zu können, sei ein Vorschlag für die Zeitmessungsgeräte gemacht. Es handle sich dabei um eine senkrecht zur Bewegungsrichtung stehende Röhre der Länge L , in welchem ein Lichtstrahl zu einem Spiegel und wieder zurück läuft. Die dazu verwendete Zeit $\Delta t' = 2L/c$ stellt die Zeiteinheit dieses Gerätes dar. Wie erscheint nun die Zeiteinheit, die an einem bestimmten festen Ort im System S' gegeben ist, vom System S aus? Von S aus gesehen bewegt sich das Rohr mit der Geschwindigkeit v . Das Licht legt daher einen längeren Weg $\sqrt{(2L)^2 + v^2 \Delta t^2}$ zurück, wobei Δt die in System S gemessene Zeitspanne ist. Da dieser Weg andererseits $c\Delta t$ sein muss, gilt quadriert

$$c^2 \Delta t^2 = (2L)^2 + v^2 \Delta t^2 = c^2 \Delta t'^2 + v^2 \Delta t^2 \quad \Leftrightarrow \quad (c^2 - v^2) \Delta t^2 = c^2 \Delta t'^2,$$

also $\Delta t^2 = \Delta t'^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Die Zeit erscheint folglich gedehnt oder dilatiert. Auch die *Zeitdilatation* ist, wie sich schnell zeigen lässt, eine symmetrische Beziehung, was wiederum darauf beruht, dass die Messung eines Vorgangs an einem festen Ort in S' an verschiedenen Orten in S gemessen wird.

4.1.6 Relativistischer Dopplereffekt

Zum Abschluss kehren wir zum Dopplereffekt zurück, den wir nun auch für optische Phänomene formulieren können, ohne einen Äther bemühen zu müssen. Am Ursprung des Systems S' ($x' = 0$) sei eine Lichtquelle befestigt, und die Intervalldauer des ausgesandten Lichtes sei gegeben durch T' . Der Einfachheit halber sei angenommen, dass dieses erste Intervall genau zu dem Zeitpunkt $t'_1 = t_1 = 0$ beginnt, an dem der Ursprung der Systeme genau übereinanderliegen, $x'_1 = x_1 = 0$. Das Ende des ersten Intervalls findet sich dann bei

$$x_2 = \frac{x'_2 + vt'_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{vT'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + vx'_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{T'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Der Lichtimpuls aber muss erst noch zum Ursprung des Systems S zurückgelangen, denn dort sitzt der Empfänger. Es gilt also

$$T = t_2 + x_2/c = \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} T'.$$

Der Zähler des Bruches bewirkt den *longitudinalen Dopplereffekt* in direkter Analogie zum akustischen Dopplereffekt. Der Nenner dagegen bewirkt den *transversalen Dopplereffekt* und ist nur relativistisch zu begründen. Für die Frequenzen $\nu = 1/T$ und $\nu' = 1/T'$ erhält man schließlich

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c} \nu' = \frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}} \nu'.$$

4.2 Relativistische Kinematik

Fassen wir zusammen: geht man nur von den Gesetzen der Mechanik aus, die in allem Inertialsystemen gleichermaßen gelten sollen, so kann zur Überführung von einem zum anderen System die *Galileitransformation* benutzt werden. Versucht man diese Invarianz auf *alle* Gesetze der Physik in Inertialsystemen auszudehnen, so muss als Transformation die *Lorentztransformation* herhalten. Beschränkt man sich schließlich nicht mehr auf Inertialsysteme, so kann dies nur im Rahmen der *Allgemeinen Relativitätstheorie* behandelt werden, die Einstein im Jahre 1915 veröffentlichte und die uns im letzten Abschnitt dieses Kapitels beschäftigen wird. Allgemein gilt das

Relativitätsprinzip

Es ist unmöglich, Bezugssysteme (Inertialsysteme) durch physikalische Messungen (Mechanik, Elektrodynamik) als ruhend oder bewegt auszuzeichnen und darin voneinander zu unterscheiden.

Bleiben wir aber noch bei der speziellen Relativitätstheorie und betrachten wir die Kinematik, also die Geschwindigkeiten, Impulse und Energien im *relativistischen Fall*, für relative Geschwindigkeiten also, die vergleichbar sind mit der Lichtgeschwindigkeit. Doch woher kennt man eigentlich die Lichtgeschwindigkeit?

4.2.1 Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit

Ausgehend vom griechischen Philosophen **Aristoteles** (384–322 vor Christus) behauptete noch der französische Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler **René Descartes** (1596–1650), dass die Ausbreitung des Lichtes „augenblicklich“ erfolge, also keine Zeit brauche.

Erste Hinweise auf eine endliche Lichtgeschwindigkeit lieferte der dänische Astronom **Ole Christensen Rømer** (1644–1710) im Jahre 1676, als er Verzögerungen in der Bedeckung der Jupiteroberfläche durch den Schatten des Mondes Io feststellte. Befand sich die Erde in Konjunktion zum Jupiter, also näher an diesem gelegen, so geschah die Bedeckung früher als in dem Falle, in dem die Erde in Opposition zum Jupiter, also weiter von ihm entfernt stand. Rømer maß eine relative Verzögerung von 22 Minuten und bestimmte dann über den bekannten Radius der Erdbahn die Geschwindigkeit des Lichtes zu $212\,000\text{ km/s}$.

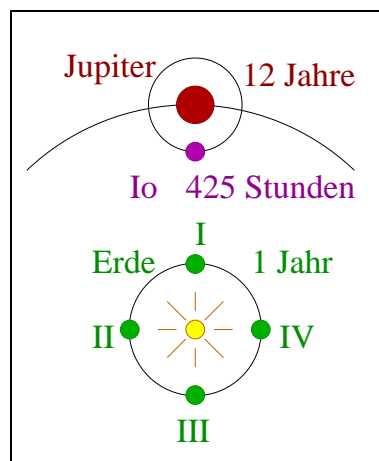


Abb. 4.4 Ole Rømers Messung

Die Geschwindigkeit der Erde von $v = 3 \cdot 10^4\text{ m/s}$, bestimmt über den Radius der Erde, der täglichen Drehung und die geographische Breite (von Greenwich) ist verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit gering. Dennoch erreicht ein

Lichtstrahl aus dem Zenit die Erde unter einem von Null abweichenden Winkel α , und es gilt näherungsweise $\tan \alpha \approx v/c$ (dazu später mehr). Man spricht von der *Aberration* des Lichtes. Ist der Winkel in Bogenmaß angegeben und klein, so ist er gleich dem Tangens dieses Winkels (Ist dieser in Grad angegeben, so muss er noch mit $2\pi/360^\circ$ multipliziert werden). Der britische Geistliche und Astronom **James Bradley** (1693–1762) maß im Jahre 1725 eine Aberration von 20 Bogensekunden ($20''$), also

$$\frac{v}{c} \approx \tan \alpha = \frac{2\pi \cdot 20}{360 \cdot 3600}$$

und berechnete daraus die Lichtgeschwindigkeit als $c \approx 3.09 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, ein für die damalige Zeit erstaunlich genaues Ergebnis.

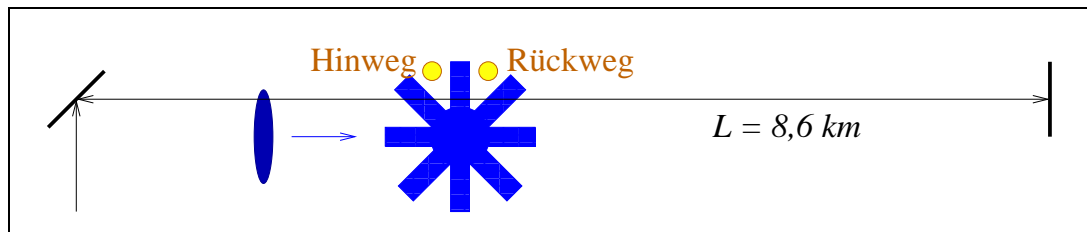


Abb. 4.5 Zahnradmethode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit nach Fizeau

Ein rein terrestrisches Verfahren zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit wurde vom französischen Physiker **Hippolyte Fizeau** (1819–1896) im Jahre 1849 entwickelt (siehe Abbildung 4.5). Der Strahl eines Lasers wird von einem in der Entfernung von $L = 8.6 \text{ km}$ aufgestellten Spiegel zurückgeworfen. In den Strahlengang wird ein schnellrotierendes Zahnrad gestellt. Ist die Drehung des Zahnrades so schnell, dass der zurückkommende Strahl eine Zahnradkerbe weiter durchläuft als der losgeschickte Strahl, so ist eine deutliche Verstärkung der Helligkeit zu verzeichnen. Über die Gleichung

$$t_{\text{Licht}} = \frac{2L}{c} = \frac{1}{\nu n} = t_{\text{Rad}},$$

wobei n die Zahl der Zähne und ν die Frequenz der Raddrehung ist, lässt sich die Lichtgeschwindigkeit bestimmen. Mit einem Zahnrad aus $n = 1440$ Zähnen ergibt sich der Effekt bei einer Frequenz $\nu = 12.6 \text{ s}^{-1}$. Die Lichtgeschwindigkeit kann somit bestimmt werden als $c = 2L\nu n = 3.12 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

In einem Experiment benutzen wir schließlich die Drehspiegelmethode, um selbst die Lichtgeschwindigkeit zu bestimmen (siehe Abbildung 4.6). Der Laserstrahl wird auch in diesem Fall wieder in sich selbst zurückgeführt, allerdings ist der letzte Spiegel schnellrotierend aufgehängt. Findet der hinlaufende Strahl in einem bestimmten Moment den Strahlengang, so trifft er bei der Rückkehr auf einen leicht verdrehten letzten Spiegel. Über eine halbreflektierende Glasscheibe wird der zurückkommende Strahl aus dem Strahlengang entkoppelt,

und die Abweichung d des Auftreffpunktes im Vergleich zur statischen Situation lässt sich messen. Die Bestimmungsgleichung lautet

$$t_{\text{Licht}} = \frac{2L}{c} = \frac{\alpha}{2\pi\nu} = t_{\text{Spiegel}}.$$

Dabei ist ν die Frequenz (d.h. $2\pi\nu$ die Kreisfrequenz) und α der Drehwinkel des Spiegels. Letzterer lässt sich als Abweichung 2α des Reflexionswinkels über

$$2\alpha \approx \tan(2\alpha) = \frac{d}{l_1 + l_2} = \frac{d}{l} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{d}{2l}$$

bestimmen.

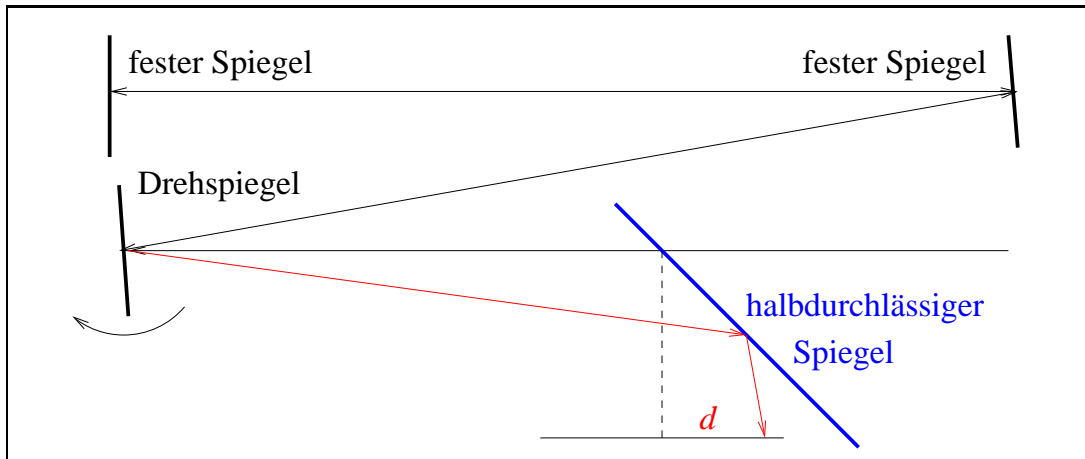


Abb. 4.6 Drehspiegelmethode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit

Die doppelte Drehfrequenz ergibt sich durch die Lichtreflexe über die Spiegelanlage, da der sich drehende Spiegel zwei spiegelnde Flächen hat. Statt ν wird $\nu' = 2\nu$ über einen Photomultiplier gemessen und von einem Messgerät angezeigt. Die Lichtgeschwindigkeit ist dann

$$c = \frac{4\pi\nu L}{\alpha} = \frac{8\pi\nu Ll}{d} = \frac{4\pi Ll\nu'}{d}.$$

Wir regeln nun die Drehfrequenz so, dass sich bestimmte Werte für die Abweichung d ergeben. Zur Fehlerkontrolle machen wir die Messung für jeden Messpunkt zweimal und stellen eine Tabelle auf.

d	ν' [Hz]	ν'/d [Hz/mm]
1 mm	275 278	275 278
2 mm	575 570	288 285
3 mm	843 840	281 280
4 mm	1135	284

Mit einem mittleren Wert von $\nu'/d = 281.5 \text{ Hz/mm}$ erhalten wir schließlich eine Lichtgeschwindigkeit von $c = 2,9715 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Dies kann verglichen werden mit einem heute gesicherten Wert von $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$.

4.2.2 Relativistische Addition von Geschwindigkeiten

Bisher haben wir Längen und Zeitintervalle betrachtet, die kleiner bzw. größer wurden, wenn sie von einem System S aus im anderen System S' beobachtet wurden, das sich gegenüber S mit der Geschwindigkeit v (vereinbarungsgemäß in x -Richtung) bewegt. Aber wie sieht es mit den Geschwindigkeiten aus? In Komponenten geschrieben sei der Geschwindigkeitsvektor in S' gegeben durch

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'},$$

und gesucht sind die entsprechenden Komponenten im System S . Mit

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + v dx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + v dx'/c^2} = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2}, \\ u_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{dt' + v dx'/c^2} = \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_x v/c^2}, \\ u_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{dt' + v dx'/c^2} = \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_x v/c^2}. \end{aligned}$$

Als erstes Beispiel betrachten wir ein Photon, das entlang der x' -Achse des Systems S' mit der Geschwindigkeit $u'_x = c$ fliege ($u'_y = u'_z = 0$). Dann gilt

$$u_x = \frac{c + v}{1 + cv/c^2} = c, \quad u_y = 0 \quad \text{und} \quad u_z = 0.$$

In einem zweiten Beispiel fliege das Photon statt in x' -Richtung in y' -Richtung mit $u'_y = c$, aber $u'_x = u'_z = 0$. Dann ist

$$u_x = v, \quad u_y = c\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad u_z = 0.$$

Für das Betragsquadrat der Geschwindigkeit ergibt sich erneut

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = v^2 + c^2(1 - v^2/c^2) = c^2,$$

aber das Photon bewegt sich bezüglich S mit einem Winkel α zur y -Achse, für den gilt

$$\tan \alpha = \frac{u_x}{u_y} = \frac{v}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Eine praktische Anwendung dieses Beispiels ist die *relativistische Aberration* des auf die Erde treffenden Lichtes aus dem Zenit von der Vertikalen.

Als drittes Beispiel schließlich gehen wir der Frage nach, mit welcher Geschwindigkeit sich zwei Teilchen zueinander bewegen, die im Schwerpunktsystem gegeneinandergerichtete Geschwindigkeiten von $\pm 0.9c$ haben. Dazu versetzen wir uns in Ruhesystem des einen Teilchens und betrachten aus diesem heraus die Bewegung des anderen Teilchens. Wir erhalten

$$v'_x = \frac{v_{1x} - v_{2x}}{1 - v_{1x}v_{2x}/v^2} = \frac{0.9c + 0.9c}{1 + 0.81} = 0.994c.$$

4.2.3 Der relativistische Impuls

Lässt sich der relativistische Impuls nun durch die Multiplikation mit der Masse erhalten? Kriterium dafür muss der Impulssatz sein, der in jedem Inertialsystem gelten muss. Betrachten wir dazu zwei in der (x, y) -Ebene des Ausgangssystems S stoßende, gleichschwere Massen mit Geschwindigkeiten $\vec{v}(1) = (v_x, v_y)$ und $\vec{v}(2) = (-v_x, -v_y)$. Nach dem Stoß sollen sich die Massen senkrecht zur Stoßrichtung bewegen mit den Geschwindigkeiten $\vec{v}(1') = (v_x, -v_y)$ und $\vec{v}(2') = (-v_x, v_y)$. Wie aber sieht es in einem System S' aus, das sich mit der Geschwindigkeit $v = v_x$ in x -Richtung gegenüber S bewegt? In diesem System gilt für die Massen vor dem Stoß

$$v'_x(1) = \frac{v - v}{1 - v^2/c^2} = 0, \quad v'_y(1) = \frac{v_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v^2/c^2}$$

und

$$v'_x(2) = \frac{-v - v}{1 + v^2/c^2}, \quad v'_y(2) = \frac{-v_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v^2/c^2},$$

nach dem Stoß aber

$$v'_x(1') = \frac{v - v}{1 - v^2/c^2} = 0, \quad v'_y(1') = \frac{-v_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v^2/c^2}$$

und

$$v'_x(2') = \frac{-v - v}{1 + v^2/c^2}, \quad v'_y(2') = \frac{v_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v^2/c^2}.$$

Während der Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung durch den Stoß nicht verändert wird, gilt für die Geschwindigkeitskomponenten in y -Richtung

$$v'_y(1) + v'_y(2) > 0, \quad v'_y(1') + v'_y(2') < 0.$$

Damit ist $m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$ zumindest in y -Richtung nicht erhalten. Wie kommen nun diese Abweichungen von $v_y(1) + v_y(2) = 0 = v_y(1') + v_y(2')$ zur einen und zur anderen Seite zustande? Betrachten wir $m(dy/dt)$, so sind m und dy lorentz-invariante Größen, aber nicht dt . Ein möglicher Vorschlag wäre daher, statt dt das Eigenzeitdifferential $d\tau$ zu verwenden und $p_y = m(dy/d\tau) = m\gamma(dy/dt)$ zu wählen. Gleiches muss auch für die anderen Komponenten gelten, also $p_x := m(dx/d\tau)$ und $p_z := m(dz/d\tau)$ oder zusammengefasst

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{x}}{d\tau}.$$

4.2.4 Die relativistische Energie

Aber auch mit der einfachen Definition $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\bar{v}^2$ scheint etwas nicht zu stimmen. Betrachten wir dazu ein Elektron der negativen Elementarladung $-e$, das eine Potentialdifferenz durchfliege, hervorgerufen beispielsweise durch die elektrische Spannung $-U$ in einer Fernsehröhre. Es gewinnt dabei die Energie

$$\Delta E = eU = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{2\frac{eU}{m}} = 5.931 \cdot 10^5 \sqrt{U}.$$

Für eine Spannung $U = 10^4 \text{ V}$ ergibt sich $v = 5.931 \cdot 10^7 \text{ m/s}$, für $U = 10^6 \text{ V}$ dagegen $v = 5.931 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Dies ist größer als die Lichtgeschwindigkeit. Was ist also falsch: die potentielle Energie eU oder die kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$? Werden die Elektronen auf ein Thermoelement geschossen, so kann die aufgenommene Energie direkt gemessen werden. Sie entspricht genau eU . Also ist die Formel für die kinetische Energie falsch. Doch wie ist die richtige Formel?

Starten wir dazu vom eben (richtig) definierten relativistischen Impuls. Die zeitliche Ableitung des Impulses ist die Kraft, und integrieren wir diese über den vom Elektron zurückgelegten Weg, so erhalten wir die Arbeit, welche am Elektron geleistet wird. Diese ist aber gleich der kinetischen Energie, die das zuvor ruhende Elektron gewinnt. Unter Verwendung von $dx = v dt$ können wir das Integral sodann in ein Integral über das Zeitintervall umformen und anschließend ausrechnen:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \int F dx = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) dx = \\ &= \int \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{dv}{dt} + v \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{2v}{c^2}\right) \frac{dv}{dt} \right) v dt = \\ &= \int \frac{mv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{dv}{dt} dt = \int \frac{mv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} dt = \\ &= \int \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right) dt = mc^2 \gamma - mc^2. \end{aligned}$$

Die kinetische Energie ist also die Differenz aus der *Gesamtenergie* $E_{\text{ges}} = mc^2 \gamma$ und der *Ruheenergie* $E_0 = mc^2$ als einer der Masse innewohnenden Energie. Letztere gilt meist schlechthin (und verkürzt in der Form $E = mc^2$) als die berühmteste Gleichung Einsteins, die sich vor allem in der Kernspaltung in Erscheinung setzt. Die so definierte relativistische kinetische Energie reproduziert aber im nichtrelativistischen Grenzfall $v \ll c$ gerade die bekannte Formel für die kinetische Energie,

$$E_{\text{kin}} = mc^2 \gamma - mc^2 = mc^2 (1 - v^2/c^2)^{-1/2} - mc^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \dots$$

Der erste Anteil ist die bekannte nichtrelativistische kinetische Energie, die durch den zweiten und alle folgenden Anteile erhöht wird, so dass das elektrische Feld im getrachteten Experiment das Elektron zunehmend schwerer

beschleunigen kann. Es ist also hier richtiger anzusetzen

$$eU = mc^2(\gamma - 1) \quad \Rightarrow \quad v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + eU/mc^2)^2}}.$$

Im Falle $U = 10^4 \text{ V}$ liefert diese Formel $v = 0.195c = 5.845 \cdot 10^7 \text{ m/s}$, also etwas weniger als in der naiven Rechnung, im Falle $U = 10^6 \text{ V}$ aber ergibt sich $v = 0.941c = 2.821 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Solche hochrelativistischen Geschwindigkeiten (aber immer noch kleiner als die Lichtgeschwindigkeit) werden in modernen Teilchenbeschleunigern erreicht.

4.2.5 Transformation von Energie und Impuls

Unter Beachtung von

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau}$$

lassen sich Energie und Impuls in ähnlicher Gestalt schreiben,

$$E = mc^2 \frac{dt}{d\tau}, \quad \vec{p} = m \frac{d\vec{x}}{d\tau}. \quad (4.3)$$

Demzufolge transformiert sich die Energie wie die Zeit, der Impuls aber wie der Ort unter Lorentztransformationen,

$$\begin{aligned} E' &= mc^2 \gamma \left(\frac{dt}{d\tau} - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{d\tau} \right) = \gamma (E - vp_x), \\ p'_x &= m\gamma \left(\frac{dx}{d\tau} - v \frac{dt}{d\tau} \right) = \gamma \left(p_x - \frac{v}{c^2} E \right), \\ p'_y &= m\gamma \frac{dy}{d\tau} = p_y, \\ p'_z &= m\gamma \frac{dz}{d\tau} = p_z. \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.2.6 Vollständig inelastischer Stoß und Bindungsenergie

Als Anwendung der soeben kennengelernten Lorentztransformation betrachten wir den vollständig inelastische Stoß zweier gleicher Massen, die sich nach dem Stoß nicht mehr trennen. Im Schwerpunktsystem dieser beiden Massen gilt $p_1 + p_2 = 0$, aber auch $E_1 + E_2 = E_3$. Da die Gesamtmasse nach dem Stoß im Schwerpunktsystem ruht, ist ihre Energie gegeben durch $E_3 = m_3 c^2$. Die Energien der beiden Massen vor dem Zusammenstoß ist aber $E_1 = mc^2 \gamma$ und $E_2 = mc^2 \gamma$, so dass man $m_3 = 2m\gamma$ hat. Die Masse der verschmolzenen Masse ist also *größer* als die Summe der beiden Einzelmassen, und die Differenz ist

$$m_3 - 2m = 2m(\gamma - 1) \approx \frac{mv^2}{c^2} = \frac{2E_{\text{kin}}}{c^2},$$

also die Summe der beiden kinetischen Energien. In einem gebundenen System mehrerer Massen dagegen ist die Gesamtmasse *kleiner* als die Summe der Einzelmassen. So ergibt sich im Falle des Wasserstoffatoms

$$\Delta m_H = m_p + m_e - m_H = \frac{E_{\text{pot}}}{c^2} = \frac{13.6\text{eV}}{c^2}$$

was etwa das $2.7 \cdot 10^{-5}$ -fache der Elektronenmasse von $511\text{keV}/c^2$ ausmacht. In SI-Einheiten umgerechnet ergibt sich

$$\Delta m_H = \frac{13.6\text{V} \cdot 1.9 \cdot 10^{-19}\text{C}}{9 \cdot 10^{16}\text{m}^2/\text{s}^2} = 2.42 \cdot 10^{-35}\text{kg},$$

also ein winziger Wert. Eine deutlichere Differenz erhält man für den Deuteriumkern, der sich aus Proton und Neutron zusammensetzt,

$$\Delta m_D = m_p + m_n - m_D = 4.0 \cdot 10^{-30}\text{kg},$$

also die etwa 4.4-fache Elektronenmasse. Die Bindungsenergie ist also 2.23MeV , und diese wird frei, wenn Wasserstoff in der Kernfusion auf der Sonne zu Helium „verbrennt“ (aus einem Pfund Wasserstoff lassen sich so theoretisch 10^7kWh Energie gewinnen – bis zur praktischen Nutzbarmachung der Kernfusion auf Erden ist es aber noch ein langer und steiniger Weg).

4.2.7 Versuch zur Relativistik

Auch im Jahre 1963 zweifelten einige noch an der Gültigkeit der Geschwindigkeitsaddition der Relativitätstheorie. Aus diesem Grunde führte der israelische Physiker **Dror Sadeh** (1932–1993) ein Experiment durch, welches die beiden Geschwindigkeitsadditionen miteinander vergleichen sollte. Er benutzte dabei eine dünne Platte aus radioaktivem Cu^{64} , dessen Strahlung aus positiven Beta-Teilchen (Positronen) er in einen Kollimator leitete. Am Ende des Kollimatorrohres trafen die Positronen dann auf ein ruhendes Stück Plexiglas. In diesem Material vernichteten sich die Positronen mit den vorhandenen Elektronen und sandten daraufhin zwei Photonen in etwa entgegengesetzte Richtungen aus. Die Photonen wurden nach gleichlangen Wegen durch zwei Kollimatorstrecken in Photomultipliern gemessen und ihre Laufzeitunterschiede bestimmt.

Die Versuchsanordnung aus der Originalveröffentlichung (Physical Review Letters **10** (1963) 271) ist in Abbildung 4.7 zu sehen. Die Geometrie des Versuchsaufbaus erlaubt es, Positronen einer kinetischen Energie von 200 bis 600keV zu messen (bei einer Masse des Positrons = Elektrons von 511keV). Versetzt man sich bei gegebener Positronenergie in das jeweilige Schwerpunktsystem aus Positron und (ruhemdem) Elektron, so werden die beiden Photonen in diesem System in genau entgegengesetzte Richtung mit Lichtgeschwindigkeit abgestrahlt. Anders sieht es jedoch im Laborsystem aus (Übungsaufgabe).

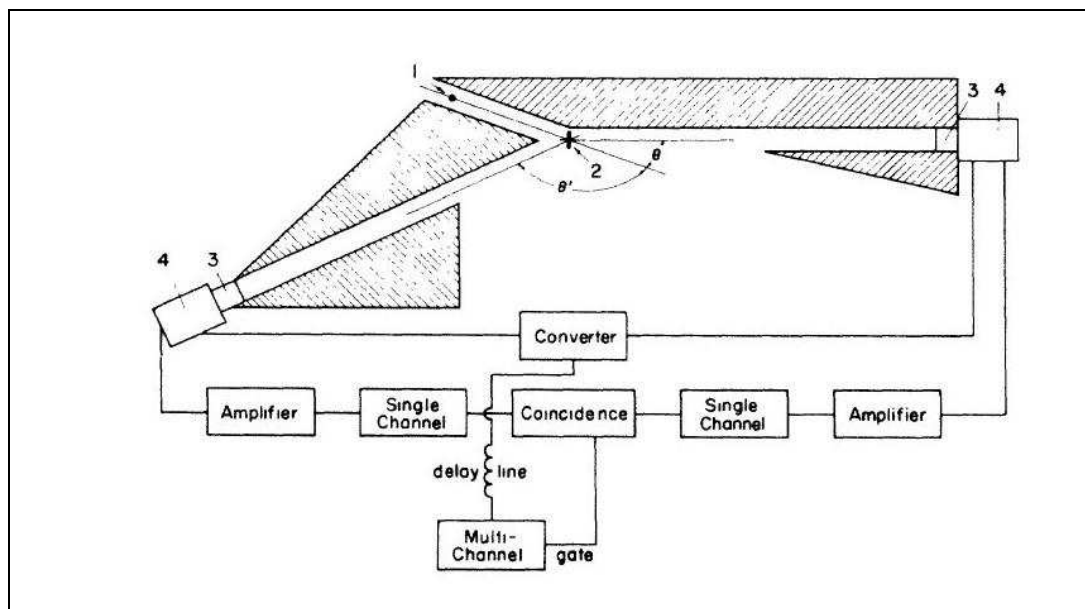


Abb. 4.7 Sadehs Versuchsaufbau (Abbildung aus Phys. Rev. Lett. 10 (1963) 271)

Sadeh berechnete bei relativistischer Geschwindigkeitsaddition einen Öffnungswinkel von 155.5° , bei Galileischer Addition aber einen Winkel von 157° . In beiden Fällen erreichen die Photonen durch die nachfolgenden Kollimatoren die Photomultiplier, die im festen Winkel von 20° und 135° zum Einlaufkollimator liegen, und Sadeh macht sich auch nicht die Mühe, diese geringe Winkeldifferenz zu messen. Stattdessen misst er die Laufzeitunterschiede, die im relativistischen Fall (mit beiden Photongeschwindigkeiten gleich c) verschwinden sollte, im galileischen Fall aber nicht: hier ist das vorwärtsgestreute Photon schneller, das zurückgestreute Photon aber langsamer als c . Das Ergebnis, das im Artikel dokumentiert ist, bevorzugt eindeutig die relativistische Variante.

4.3 Vierervektoren

Schon in den beiden vorangegangenen Kapiteln haben wir gesehen, dass sich die Zeit zusammen mit dem Raumvektor und die Energie zusammen mit dem Impulsvektor transformiert. Zeit und Energie verlieren damit ihre Eigenständigkeit als unveränderliche Größen, und es ist daher naheliegend, sie als eine von vier Komponenten in einem erweiterten Vektor, dem *Vierervektor*, zu betrachten. Noch zu Beginn des vergangenen Jahrhunderts wurde die Zeitkomponente an den Dreiervektor als vierte Komponente angehängt. Die moderne Schreibweise aber stellt die Zeitkomponente an den Anfang und bezeichnet sie als nullte Komponente, was deutlich machen soll, dass die Zeitkomponente trotz ihrer Vereinigung mit den Raumkomponenten dennoch eine gewisse Eigenart bewahrt (um dies auch im expliziten Vierervektor deutlich zu machen, kann man diese Komponente durch ein Semikolon von den anderen, durch Kommata getrennten Komponenten absondern). Schließlich müssen aber wie in jedem Vektor alle Komponenten dieselbe physikalische Einheit besitzen. Im Ortsvierervektor ist daher die Nullkomponente gegeben durch $x_0 = ct$.

4.3.1 Kausalität und Lichtkegel

Der Ortsvierervektor $(ct; x, y, z)$ beschreibt ein *Ereignis*. Da die Zeit aber nun Teil eines Vektors ist, gilt die Gleichzeitigkeit nicht mehr absolut: zwei Ereignisse $(ct; x_1, y_1, z_1)$ und $(ct; x_2, y_2, z_2)$, die im System S als gleichzeitig gelten, brauchen im System S' mit $ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1)$, $ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2)$ ($\beta = v/c$) nicht mehr gleichzeitig zu sein, denn

$$ct'_2 - ct'_1 = -\gamma\beta(x_2 - x_1) \neq 0 \quad \text{für} \quad x_1 \neq x_2.$$

Doch zwei Ereignisse, die in einem System als gleichzeitig gelten, können nicht kausal verknüpft sein. Für eine *Kausalität* muss gelten, dass in *allen* Systemen z.B. $ct_2 > ct_1$ ist, also auch

$$ct'_2 - ct'_1 = \gamma(ct_2 - ct_1) - \gamma\beta(x_2 - x_1) > 0.$$

Damit dies erfüllt ist, muss insbesondere gelten $|ct_2 - ct_1| > |x_2 - x_1|$. Ereignisse, welche solch eine Bedingung erfüllen, heißen *zeitartig verknüpft*, solche aber mit $|ct_2 - ct_1| < |x_2 - x_1|$ *raumartig verknüpft*. Drehen wir die räumlichen Achsen, so gilt die Beziehung nicht nur für die x -Komponente des Ortsvektors, sondern allgemein für die Differenz der Ortsvektoren,

$$|ct_2 - ct_1| > |\vec{x}_2 - \vec{x}_1| \quad (\text{zeitartig}), \quad |ct_2 - ct_1| < |\vec{x}_2 - \vec{x}_1| \quad (\text{raumartig}).$$

Da man die Situation im vierdimensionalen Raum schlecht darstellen kann, lässt man gewöhnlich eine Raumkoordinate weg. Es ergibt sich dann zu einem bestimmten Ereignis A das Bild eines *Doppellichtkegels* $|ct_2 - ct_1| = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$, welcher die mit A zeitlich verknüpften Ereignisse in seinem Inneren von den mit A räumlich verknüpften Ereignissen in seinem Äußeren trennt. Die Ereignisse auf dem Doppelkegel selbst sind mit dem Ereignis A *lichtartig verknüpft*, d.h. zwischen ihnen kann nur ein Lichtstrahl vermitteln.

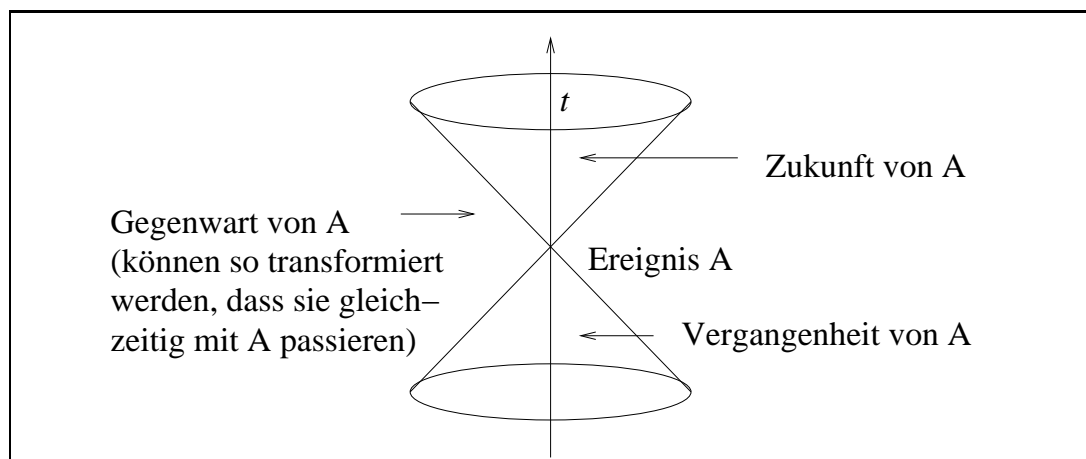


Abb. 4.8 Doppellichtkegel und Kausalität

4.3.2 Transformationen und Metrik

Wenn sich unter Lorentztransformationen Längen verkürzen und Zeiten verlängern, so ist es gerechtfertigt zu fragen, was denn wohl konstant bleibt, so wie bei der Drehung im Raum der räumliche *Abstand* $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ konstant bleibt. Transformationen im vierdimensionalen Raum der Vierervektoren umfassen neben den Drehungen auch die Lorentztransformationen (nach dem französischen Mathematiker, Physiker und Philosoph **Jules Henri Poincaré** (1854–1912) zusammen als *Poincaré-Transformationen* bezeichnet). Eine Invariante ist beispielsweise die *Eigenzeit*, also die gemessene Zeit eines Beobachters in seinem eigenen Ruhesystem. Aus

$$c\Delta t = \gamma(c\Delta t' - \beta\Delta x') \quad \text{mit} \quad \Delta x' = 0 \quad (\text{ruhender Beobachter})$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} c\Delta\tau &:= c\Delta t' = \gamma^{-1}c\Delta t = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t = \sqrt{c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2} \Delta t = \\ &= \sqrt{c^2 - \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 - \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 - \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} \Delta t = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}. \end{aligned}$$

Da dies für jede beliebige Lorentztransformation gilt, haben wir also in der Tat ein invariantes Längenmaß gefunden, das normalerweise im Quadrat geschrieben wird,

$$c^2\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = -\Delta s^2.$$

Nur für zeitartige Abstände ist $c^2\Delta\tau^2$ positiv und damit $c\Delta\tau$ reell. Für raumartige Abstände verwendet man besser die *Bogenlänge* Δs . Verwendet man den Ortsvierervektor, so kann man die Invariante auch ausdrücken durch eine Metrik, die *Minkowskische Metrik* mit den Komponenten $\eta_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$),

$$c^2\Delta\tau^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad (4.5)$$

($\eta_{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$ und ansonsten $\eta_{\mu\nu} = 0$).

4.3.3 Andere Vierervektoren

Ausgehend vom lorentzkovarianten Ortsvierervektor

$$\mathbf{x} = (ct; x, y, z) = (ct; \vec{x})$$

(Vierervektoren seien im Folgenden in Fettschrift geschrieben) lassen sich unter Zuhilfenahme von Lorentzinvarianten wie der Eigenzeit τ und der Masse m weitere Vierervektoren ableiten:

- Der Vierervektor der Geschwindigkeit,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \left(\frac{d(ct)}{d\tau}; \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right) = (\gamma c; \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z) = \gamma(c; \vec{v})$$

- Der Vierervektor des Impulses,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = (m\gamma c; m\gamma\vec{v}) = \left(\frac{E}{c}; m\gamma\vec{v}\right) = \gamma(p_0; \vec{p})$$

- Der Vierervektor der Beschleunigung,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\right) = \gamma \frac{d}{dt} (\gamma c; \gamma\vec{v}) = \gamma(a_0; \vec{a})$$

- Der Vierervektor der Kraft,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} (m\gamma c; m\gamma\vec{v}) = \gamma(F_0; \vec{F}).$$

Zu Beschleunigung und Kraft ist zu beachten, dass bei nicht konstanter Geschwindigkeit auch die Ableitung von γ nach der Zeit bestimmt werden muss. Lorentzinvarianten zu diesen lorentzkovarianten Vektoren sind deren Skalarprodukte und insbesondere Quadrate, die unter Berücksichtigung der Minkowskischen Metrik gebildet werden, also beispielsweise

$$\mathbf{v}^2 = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 \vec{v}^2 = c^2 \quad \text{und} \quad \mathbf{p}^2 = m^2 c^4.$$

4.3.4 Kovariante Form des Energiesatzes

Auch ein Skalarprodukt aus zwei verschiedenen Vierervektoren ist invariant unter Lorentztransformationen von einem Inertialsystem in ein anderes. Dies gilt beispielsweise für das Skalarprodukt aus Geschwindigkeit und Kraft,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = v_0 F_0 - \sum_{i=1}^3 v_i F_i.$$

Nun ist dieses Skalarprodukt nicht nur konstant, sondern sogar Null, denn

$$\mathbf{v} \cdot m \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \frac{1}{2} m \frac{d(\mathbf{v}^2)}{d\tau} = \frac{1}{2} m \frac{d(c^2)}{d\tau} = 0.$$

Angenommen nun, die Kraft sei durch ein Potential erzeugt, $\vec{F} = -\text{grad } V(\vec{r})$. Dann gilt

$$\gamma c F_0 = \gamma \vec{v} \cdot \vec{F} = -\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d}{d\vec{r}} (V(\vec{r})) = -\gamma \frac{d}{dt} V(\vec{r}(t)).$$

Unter Verwendung von $F_0 = d(\gamma mc)/dt$ ergibt sich

$$\frac{d}{dt} (\gamma mc^2) = -\frac{d}{dt} V(\vec{r}(t)) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} (\gamma mc^2 + V(\vec{r}(t))) = 0.$$

Die Summe $\gamma mc^2 + V(\vec{r})$ aus der Energie eines freien Teilchens und der potentiellen Energie ist also zeitlich konstant.

4.3.5 Physikalische Gesetze in bewegten Systemen

Gegeneinander gleichförmig bewegte Systeme, sogenannte Inertialsysteme, haben die herausragende Eigenschaft, dass alle physikalischen Gesetze dieselbe Gestalt besitzen, unabhängig vom Inertialsystem des Beobachters. Dies wollen wir uns am Beispiel des Energiesatzes klarmachen. Ein im System S ruhender Körper sende zwei Lichtpulse gleicher Energie ε in zwei entgegengesetzte Richtungen aus. Seine Energie verringert sich dabei von E_1 auf E_2 , wobei

$$E_1 - E_2 = 2\varepsilon = 2h\nu.$$

In einem entlang der Abstrahlungsachse bewegten System S' sind die Frequenzen und damit Energien der beiden Lichtpulse nicht mehr gleich, sondern vermittels des relativistischen Dopplereffekts unterschiedlich,

$$\varepsilon'_+ = h\nu\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \quad \varepsilon'_- = h\nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

in Vorwärts- bzw. Rückwärtsrichtung. In diesem System gilt daher

$$E'_1 - E'_2 = \varepsilon'_+ + \varepsilon'_- = h\nu \left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} + \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \right) = \frac{2h\nu}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2h\nu\gamma.$$

Die Energiedifferenz ist gleich der Differenz der kinetischen Energien,

$$(E'_1 - E_1) - (E'_2 - E_2) = (E'_1 - E'_2) - (E_1 - E_2) = 2h\nu(\gamma - 1)$$

wobei $E'_{1\text{kin}} = E'_1 - E_1$ die kinetische Energie im System S' vor und $E'_{2\text{kin}} = E'_2 - E_2$ die kinetische Energie im System S' nach der Abstrahlung ist. Die kinetische Energie selbst aber ist gegeben durch $E_{\text{kin}} = mc^2(1 - \gamma)$. Daraus ergibt sich dann aber

$$\Delta mc^2 = 2h\nu = 2\varepsilon,$$

d.h. die abgestrahlte Energie ist durch eine Verringerung der Ruheenergie mc^2 (und mithin der Masse) des Körpers aufgebracht worden.

4.3.6 Stetig beschleunigte Rakete

Ein Paradebeispiel für einen kinematisch möglichen, aber dynamisch unmöglichen Vorgang ist eine Rakete, die stetig beschleunigt und damit theoretisch in endlicher Zeit ungeheure Strecken zurücklegen kann. Wir wollen uns zunächst die Kinematik dieser Rakete ansehen. Angenommen, die Rakete beschleunige mit einer (von ihr aus gemessenen) Beschleunigung von $a' = 10\text{ms}^{-2}$. Im Inertialsystem des durchflogenen Raumes aber ist die Beschleunigung

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \gamma^{-3} \frac{d^2x'}{dt'^2} = \gamma^{-3} a',$$

da eine einfache Längenkontraktion und eine zweifache Zeitdilatation einzurechnen ist. Für die Geschwindigkeit im durchflogenen Raum ergibt sich damit die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = a' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2},$$

die sich erstaunlicherweise durch Quadratur lösen lässt. Dazu stellen wir die Differentialgleichung um und integrieren,

$$\int \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv = \int a' dt = a't.$$

Das linke Integral lässt sich durch die Substitution $v = c \sin \alpha$ in eine einfachere Form bringen, denn der Nenner ist dann $\cos^3 \alpha$ und das Differential im Zähler $c \cos \alpha d\alpha$. Folglich ergibt sich

$$\frac{a't}{c} = \int_0^{\alpha(t)} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan \alpha(t) = \frac{\sin \alpha(t)}{\cos \alpha(t)} = \frac{\sin \alpha(t)}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha(t)}}.$$

Durch Umstellung nach $\sin \alpha(t)$ erhält man schließlich

$$v(t) = c \sin \alpha(t) = \frac{c \tan \alpha(t)}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha(t)}} = \frac{a't}{\sqrt{1 + a'^2 t^2 / c^2}}.$$

Durch Integration erhält man auch den Ort $x(t)$,

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a'^2 t^2}{c^2}} - 1 \right).$$

Es gilt ferner

$$1 - \frac{v(t)^2}{c^2} = 1 - \frac{a'^2 t^2}{c^2 + a'^2 t^2} = \frac{c^2}{c^2 + a'^2 t^2}$$

und damit für die differentielle Zeit in der beschleunigenden Rakete

$$dt' = \frac{1}{\gamma} dt = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt = \left(1 + \frac{a'^2 t^2}{c^2}\right)^{-1/2} dt.$$

Integriert ergibt sich schließlich die Eigenzeit

$$\tau = \int dt' = \frac{c}{a} \ln \left(\frac{a't}{c} + \sqrt{1 + \frac{a'^2 t^2}{c^2}} \right).$$

Ausgehend von der Zeit t im „Weltraum“ kann man nun exemplarisch den Ort $x(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t)$ der Rakete im Weltraum sowie die Eigenzeit

in der Rakete bestimmen und in die nachfolgende Tabelle eintragen. Dabei sind Zeiten in Jahren [a] und Entfernungen in Lichtjahren [la] angegeben.

τ [a]	t [a]	x [la]	v/c
1.0	1.2	0.58	0.78
3.8	27	26.07	0.9994
11.5	81 000	80 999	$1 - 10^{-11}$

Von der Kinematik aus scheint es daher ohne weiteres möglich, dass man mit einer solchen gleichmäßig beschleunigenden Rakete innerhalb von knapp vier Jahren zum nächsten Stern, der Wega reisen kann, und nach elf einhalb Jahren den Rand der Milchstraße erreicht. Dynamisch muss man aber berücksichtigen, dass die Rakete dazu einen Teil ihrer Ruhemasse in Energie umwandeln muss. Es gilt

$$m dv' = -u dm,$$

Wobei m die Masse der Rakete, dm ihre Massenabnahme, dv' der Geschwindigkeitszuwachs und u die konstante Ausstoßgeschwindigkeit bezeichnet, alles betrachtet im beschleunigten System der Rakete. Der Geschwindigkeitszuwachs in der Rakete ist mit dem von außen betrachteten Geschwindigkeitszuwachs gekoppelt über $dv' = \gamma^2 dv$. Die Lösung dieser Differentialgleichung erhalten wir durch Quadratur,

$$-u \ln \left(\frac{m}{m_0} \right) = -u \int \frac{dm}{m} = \int \frac{dv}{1 - v^2/c^2} = \frac{c}{2} \ln \left(\frac{c+v}{c-v} \right)$$

oder umgestellt

$$v = c \frac{1 - (m/m_0)^{2u/c}}{1 + (m/m_0)^{2u/c}}.$$

Angenommen, die Rakete führe etwa 10% Nutzlast mit, d.h. $m_0/m = 10$. Dann hängt die Endgeschwindigkeit v zu dem Zeitpunkt, an dem der Treibstoff verbraucht ist, stark von der Art des Brennvorgangs ab. Handelt es sich um Kernspaltung, bei dem ein Tausendstel der Ruhemasse in Energie umgewandelt werden kann, so ist $u = c/23$. In diesem Fall ist $v = 0.1c$. Bei der Kernfusion ist $u = c/12$ und damit maximal $v = 0.2c$. Bei der Vernichtung von Materie mit Antimaterie schließlich entstehen ausschließlich Photonen, also $u = c$ und damit $v = 0.98c$. Damit fliegt die Rakete von außen betrachtet rund fünf Jahre, während in der Rakete 2.3 Jahre vergehen.

4.4 Zur allgemeinen Relativitätstheorie

Zum Abschluss der Vorlesungsreihe soll noch kurz ein Ausblick in die allgemeine Relativitätstheorie gewagt werden. In der speziellen Relativitätstheorie haben wir gelernt, dass relativ zueinander gleichmäßig bewegte, sogenannte Inertialsysteme zueinander äquivalent sind, in ihnen also dieselben Naturgesetze gelten. Klarerweise gilt dies nicht mehr für beschleunigte Systeme: bei der

Fahrt auf einem Karussell dürfte das jedem schon einmal klar geworden sein. Es gibt jedoch im Einflussbereich der Erde ein beschleunigtes System, das sich von anderen dadurch auszeichnet, dass in ihm die physikalischen Gesetze besonders einfach werden: das frei fallende Laboratorium. In ihm kompensiert sich die Gravitationskraft und die Beschleunigung, so dass Körper in diesem Laboratorium schwerelos sind. Einstein zog daraus den Schluss, dass Beschleunigungen und Gravitationsfelder äquivalent seien. Dieses *Äquivalenzprinzip* stellt die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie dar.

4.4.1 Gravitationelle Frequenzverschiebung

Nehmen wir also das Äquivalenzprinzip zur Grundlage und betrachten wir ein Laboratorium, welches sich mit einer konstanten Beschleunigung „nach oben“ bewegt. Ein am Boden angebrachter Sender strahle Licht der Frequenz ν aus. Da aber, von einem nicht beschleunigten Beobachter aus betrachtet, die Decke des Laboratoriums beim Empfang des Lichtsignals eine höhere Geschwindigkeit besitzt als die Decke bei der Aussendung, ist eine Frequenzverschiebung zu bemerken, die auch mit Hilfe des Mößbauereffektes nachgewiesen wurde.

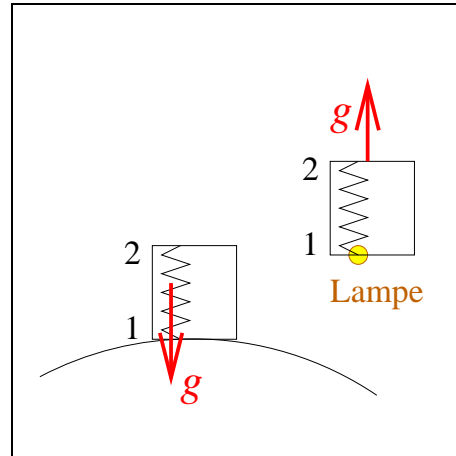


Abb. 4.9 Frequenzverschiebung

Dieser Effekt einer Frequenzerhöhung kann aber gemäß dem Äquivalenzprinzip als gravitativer Effekt betrachtet werden, der dann auch in einem ruhenden, aber einem Schwerfeld ausgesetzten Laboratorium zu messen sein müsste. So verlieren die vom Boden kommenden Photonen durch das Schwerfeld Energie,

$$E_1 = h\nu, \quad E_2 = h\nu' = h\nu - m_d g h.$$

m_d wird als *dynamische Masse* des (ansonsten masselosen) Photons bezeichnet. Nun ist die konstante Erdbeschleunigung g eine nur auf der Erdoberfläche geltende Idealisierung. Im allgemeinen beschreibt sich das Potential eines Sternes als

$$U(r) = -\frac{MG}{r}.$$

Licht, das von der Erde (gesetzt werden kann für deren Abstand $r = \infty$) auf einen Stern des Radius R trifft, erfährt dort eine Potentialdifferenz $\Delta U = MG/R$ und damit eine Frequenzverschiebung von

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu - \nu'}{\nu} = \frac{m\Delta U}{h\nu} = \frac{m\Delta U}{mc^2} = \frac{MG}{Rc^2} = \frac{R_S}{R}.$$

$R_S = MG/c^2$ ist der *Schwarzschildradius* (benannt nach dem deutschen Astronomen und Physiker **Karl Schwarzschild** (1873–1916), für die Sonne ist $R_S \approx 3\text{km}$). Falls der Radius des Sterns gleich dem Schwarzschildradius ist, so ist

$\nu' = 0$. Dies bedeutet, dass von der Oberfläche dieses Sternes kein Licht zu uns gelangen kann. Wir sprechen in diesem Fall von einem *schwarzen Loch*, aus dem kein Licht und natürlich auch keine Materie entweichen kann.

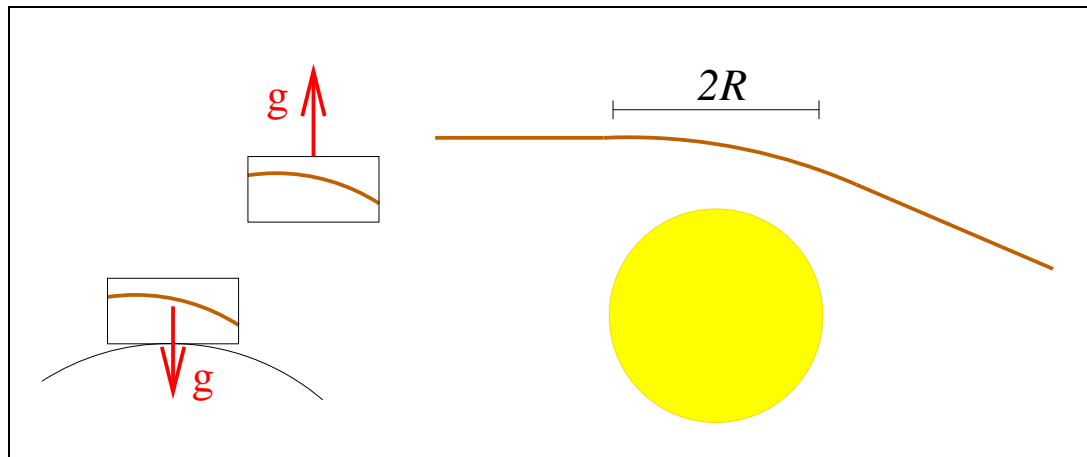


Abb. 4.10 Lichtablenkung an einem Stern

4.4.2 Gravitationelle Lichtablenkung

Ebenfalls mit Hilfe des Äquivalenzprinzipes kann die *Lichtablenkung* durch einen Stern berechnet werden, nur dass hier der Lichtstrahl nicht in Richtung der Beschleunigung verläuft, sondern eher senkrecht dazu. Ein großer Triumph Einsteins war, dass diese Lichtablenkung während einer Sonnenfinsternis am 29. Mai 1919 durch den britischen Astrophysiker **Arthur Weddington** (1882–1944) nachgewiesen werden konnte und mit dem von Einstein berechneten Wert übereinstimmte. Weitere Experimente wie eines zur *Periheldrehung* des Merkur, größer vorhergesagt als durch die anderen Planeten bewirkt, rundeten zu Anfang des 20. Jahrhunderts das Bild der Relativitätstheorie ab, die in ihren Grundzügen bis heute nichts an ihrer Faszination verloren hat.

Stichwortverzeichnis

Aberration	93
Ableitung, partielle	31
absoluter Raum	12
Achsen, Theorem orthogonaler	64
Adiabate	76
adiabatische Prozess	76
Allgemeine Relativitätstheorie	92
Amplitude	40
Anfangsbedingung	42
Äquivalenzprinzip	107
Arbeit W	24
Archimedisches Prinzip	37
asymptotischer Grenzfall	43
Äther	88
Atmosphärendruck	79
äußeres Produkt	68
Auslenkung	40
Bahndrehimpuls	54
barometrische Höhenformel	37, 78
Beschleunigung \vec{a}	6
Bewegungsenergie	24
Bewegungsgleichungen, Eulersche	70
Bogenlänge	102
Boltzmannsche Konstante k_B	77
Brennpunkt	58
Carnotscher Kreisprozess	82
Charakteristik	49
Charakteristikenmethode	49
charakteristische Gleichung	42
Clausius, Satz von	84
color	13
Coriolisbeschleunigung	11, 19
Cosinus hyperbolicus	44
Coulombwechselwirkung	13
deduktives Verfahren	57
Differential, totales	31
Dopplereffekt	87, 91
Drehimpuls \vec{L}	23
Drehmoment \vec{N}	23
Druck, hydrostatischer	38
Druck P	75, 79
dyadisches Produkt	68
dynamische Masse	107

ebene Polarkoordinaten	32
Eigendrehimpuls	54
Eigenschwingung	48
Eigenvektor	72
Eigenwert	72
Eigenzeit	102
elektrische Ladung	13
Ellipse	58
Ellipsoid	71
Energie E	24
Energie, innere	56, 76
Energiesatz	25
Entropie S	81
Erdbeschleunigung g	15
Ereignis	101
erzwungene Schwingung	45
Eulersche Bewegungsgleichungen	70
Fadenpendel	41
Fahrstrahl	57
Federkraft	9
Federpendel	41
flavor	13
Freiheitsgrad	77
Frequenz ν	40
Galileisches Prinzip	8
Galileitransformation	8, 92
Gas, ideales	76
Gastheorie, kinetische	75
Gesamtenergie	97
Geschwindigkeit \vec{v}	6
Gleichgewicht	77
Gleichzeitigkeit	90
Gleitreibung	35
Gradient	31
Gravitationskonstante G	13
Gravitationswechselwirkung	12
Grenzfall, asymptotischer	43
große Halbachse a	58
Gütefaktor Q	46
Gyrationsradius	65
Haftreibung	35
Hagen–Poiseuillesches Gesetz	37
Halbwertsbreite	45
Hauptachsentransformation	72
Höhenformel, barometrische	37, 78

hydrostatischer Druck	38
hyperbolische Funktionen	44
ideales Gas	76
Impuls \vec{p}	12
Impulssatz	21
induktives Verfahren	57
Inertialsystem	8, 88
innere Energie	56, 76
inneres Produkt	68
irreversibler Prozess	81, 84
Isochore	83
Isotherme	81
kartesischer Taucher	39
Kausalität	101
Kegelschnitt	58
Keplersche Gesetze	57
kinetische Energie	24
kinetische Gastheorie	75
kleine Halbachse b	58
konservative Kraft	29, 30
Koordinaten, ebene Polar-	32
Koordinaten, mitgeführte	32
Kraft \vec{F}	9
kräftefreier Kreisel	74
Kraftstoß \vec{J}	21
Kreisel, kräftefreier	74
Kreisfrequenz ω	40
Kriechfall	44
Ladung, elektrische	13
Lagermoment	71
Längenkontraktion	90
Leistung P	39
Lichtablenkung	108
lichtartig	101
Lichtkegel	100
Loch, schwarzes	108
longitudinaler Dopplereffekt	91
Lorentztransformation	88, 92
Masse, dynamische	107
Masse, reduzierte	53
Masse (träge/schwere)	12
Metrik, Minkowskische	102
Minkowskische Metrik	102

mitgeführte Koordinaten	32
Mittelwert	75
Nabla ∇	31
Newtonsche Gesetze	12
Nichtgleichgewicht	76
nichtkonservative Kraft	29, 35
normaler Einheitsvektor \vec{e}_N	7
Nullphase	40
Ort	6
orthogonaler Achsen, Theorem	64
partielle Ableitung	31
Pendel	41
Periheldrehung	108
Periode T	40
Perpetuum mobile	81
Phase	40
Phasenverschiebung	40
Poincaré-Transformation	102
Polarkoordinaten, ebene	32
Potential	30
potentielle Energie	30
präzedieren	74
Präzession	70
Produkt	68
raumartig	101
reduzierte Masse μ	15, 53
Reibung	35
relativistischer Fall	92
Relativitätsprinzip	92
Relativitätstheorie, allgemeine	92
Resonanz(katastrophe)	45
Restitutionskoeffizient	29
reversibler Prozess	81, 84
Rollreibung	35
Rotation	32
Ruheenergie	97
Scheinkraft	9
schwache Wechselwirkung	13
schwarzes Loch	108
Schwarzschildradius	107
Schwebung	50
schwere Masse	12
Schwerkraft	9
Schwerpunkt (CM)	52

Schwerpunktsystem (CMS)	52
Schwingfall	42
Schwingung, erzwungene	45
Seilspannung	15
Sekundenpendel	41
Selbstenergie	56
Sinus hyperbolicus	44
Skalarprodukt	68
spezifische Wärme C_V	80
starke Wechselwirkung	13
starrer Körper	63
Steinerscher Satz	64
Stirlingmotor	83
Stokessches Gesetz	38
tangentialer Einheitsvektor \vec{e}_T	7
Teilchendichte	75
Temperatur T	77
Temperaturskala	78
Tensor	68
Tensorprodukt	69
Theorem orthogonaler Achsen	64
totales Differential	31
träge Masse	12
Trägheitsmoment	64
Trägheitstensor I	68
transversaler Dopplereffekt	91
Vektor	6
Vierervektor	100
Viskosität η	36
Wärmebad	79
Wärmekapazität	79
Wärmepumpe	83
Wärmespeicher	79
Wechselwirkung	13
Wellenlänge λ	87
Winkelgeschwindigkeit	10
wirbelfreie Kraft	32
Wirkungsgrad	82
zeitartig	101
Zeitdilatation	91
Zentralkraft	12
Zentrifugalbeschleunigung	11, 18

Namensverzeichnis

Archimedes von Syrakus (287–212 v. Chr.)	37
Aristoteles (350 v. Chr.)	6, 92
Atwood, George (1745–1807)	14
Bohnenberger, Johann Gottlieb Friedrich von (1765–1831)	73
Bradley, James (1693–1762)	93
Brahe, Tycho (1546–1601)	86
Bruno, Giordano (1548–1600)	86
Carnot, Nicolas Léonard Sadi (1796–1832)	81
Cavendish, Henry (1731–1810)	13
Celsius, Andres (1701–1744)	78
Clausius, Rudolf Julius Emanuel (1822–1888)	84
Coriolis, Gaspard Gustave de (1792–1843)	11
Decartes, René (1596–1630)	6, 92
Doppler, Christian (1803–1853)	87
Einstein, Albert (1879–1955)	86
Eötvös, Loránd (1848–1919)	14
Fahrenheit, Daniel Gabriel (1686–1736)	78
Fizeau, Armand Hippolyte Louis (1819–1896)	93
Foucault, Léon (1819–1868)	20
Galilei, Galileo (1564–1642)	6. 8. 86
Gay-Lussac, Joseph Louis (1778–1850)	84
Hagen, Gotthilf Heinrich Ludwig (1797–1884)	36
Hertz, Heinrich Rudolf (1857–1894)	40
Huygens, Christiaan (1629–1695)	6
Kelvin, Lord = Thomson, William (1824–1907)	78
Kepler, Johannes (1571–1630)	6, 57, 86
Kopernikus, Nikolaus (1473–1543)	86
Lorentz, Hendrik Antoon (1853–1935)	88
Maxwell, James Clerk (1831–1879)	87
Michell, John (1724–1793)	13
Michelson, Albert (1852–1931)	87
Morley, Edward (1838–1923)	87
Newton, Sir Isaac (1643–1727)	6, 12
Noether, Emmy (1882–1935)	21, 52
Pascal, Blaise (1632–1662)	79
Poincaré, Jules Henri (1854–1912)	102
Poiseuille, Jean Louis Marie (1797–1869)	36
Rømer, Ole Christensen (1693–1762)	93
Sadeh, Dror (1932–1993)	99
Schwarzschild, Karl (1873–1916)	107
Steiner, Jakob (1796–1863)	64
Stirling, Robert (1790–1878)	83
Stokes, George Gabriel (1819–1903)	38
Weddington, Arthur (1882–1944)	108