

Vorlesung zur Physik II

gehalten von

**Prof. Dr. Dietmar Fröhlich
und Prof. Dr. Joachim Treusch
im Sommersemester 1984
an der Universität Dortmund**

herausgegeben von Stefan Groote

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	2
Vorwort	4
1. Elektrostatik mit Isolatoren	5
1.1 Ladung und Fernwirkungsgesetz	5
1.2 Feldbegriff und Nahwirkungsgesetz	6
1.3 Elektrischer Fluß und Gaußscher Satz	8
1.4 Das elektrostatische Potential	11
1.5 Die Energie des elektrischen Feldes	13
1.6 Vektoranalysis	14
2. Elektrostatik mit Leitern	19
2.1 Das Oberflächenfeld eines Leiters	19
2.2 Äquipotentialflächen	20
2.3 Die Methode der Bildladung	22
2.4 Plattenkondensator und Kapazität	24
3. Elektrostatik mit Materie	27
3.1 Entwicklung nach Momenten	27
3.2 Das Dipolmoment	28
3.3 Das elektrische Feld vieler Dipole	30
3.4 Der Plattenkondensator mit Materie	32
3.5 Ein abschließendes Experiment	34
4. Elektrische Ströme	35
4.1 Experimente zur Ionenwanderung	35
4.2 Die elektrische Stromstärke	36
4.3 Ohmsches Gesetz und elektrischer Widerstand	39
4.4 Die Kirchhoffschen Gesetze	41
4.5 Messung von Spannungen und Strömen	43
4.6 Kondensator im Widerstandsnetz	45
5. Magnetostatik	46
5.1 Magnetostatik als relativistischer Effekt	46
5.2 Das magnetische Feld	51
5.3 Das Vektorpotential	53
5.4 Das Biot-Savart'sche Gesetz	54
5.5 Energie des magnetischen Feldes	57

6. Magnetische Induktion	58
6.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz	59
6.2 Die Lenzsche Regel	61
6.3 Die Gegeninduktion	62
6.4 Die Selbstinduktion	63
6.5 Schaltungen mit Induktivitäten	64
6.6 Wechselströme	67
6.7 Leistung des elektrischen Stroms	71
7. Magnetfelder in Materie	72
7.1 Magnetische Kraftwirkung auf einen Dipol	73
7.2 Veranschaulichung der Materialeigenschaften	75
7.3 Magnetisierung und Magnetfeld	76
7.4 Ferromagnetismus	78
7.5 Die Energie des magnetischen Feldes mit Materie	80
7.6 Induktivität in Materie	80
8. Die Maxwellschen Gleichungen	81
8.1 Berechnung des Verschiebungsstroms	82
8.2 Wellenerzeugung am Hertzschen Dipol	87
8.3 Eichung der Potentiale	90
8.4 Lorentzkovariante Formulierung der Theorie	94
Stichwortverzeichnis	97
Verzeichnis der Naturkonstanten	102
Verzeichnis der Einheiten	103

Vorwort

Die Universität Dortmund bietet ihren Studenten bis zum Vordiplom, welches in der Regel nach dem vierten Semester abgelegt wird, eine Folge von vier Vorlesungen der Physik an, die experimentelle und theoretische Aspekte miteinander verbinden. Diese Vorlesungen „Physik I – IV“ werden dementsprechend auch je von einem Dozenten der experimentellen und einem der theoretischen Sparte im Wechsel gehalten. Im Sommersemester 1994 hielten Prof. Dr. Dietmar Fröhlich* und Prof. Dr. Joachim Treusch** die Vorlesung „Physik II“ an der Universität Dortmund.

Ich möchte mich bei den beiden Dozenten für die verständliche und gut strukturierte Vorlesung bedanken, die uns Studenten die klassische Elektrodynamik als ein in sich konsistentes, aber auch historisch gewachsenes Gebäude vorführten und gewissermaßen bewohnbar machten. Ich habe mich bemüht, diese Vorlesung in ihrem Aufbau und Konzept weitgehend zu erhalten, habe mich aber an einigen Punkten zu Änderungen entschlossen. Dies betrifft vor allem die Beiträge, die von beiden Dozenten kamen und die im Skript sicherlich nicht doppelt auftreten sollten. Ferner habe ich hier ausschließlich Einheiten des internationalen Systems (SI) benutzt. Ich hoffe, daß auch nachfolgende Generationen von Studentinnen und Studenten aus diesem Vorlesungsskript einen Nutzen ziehen werden.

Mainz, im März 1996

Stefan Groote***

Literaturhinweise

- Berkeley Physics Course Vol. II, (McGraw Hill, New York 1965)
- Feynman, R.P.: The Feynman lectures on Physics, Vol. 2: Mainly Electromagnetism and Matter (Massachusetts 1964)
- Jackson, J.D.: Classical Electrodynamics (Wiley, New York 1982) oder: Jackson, J.D.: Klassische Elektrodynamik (de Gruyter, Berlin 1983)
- Brand, S. und Dahmen, H.D.: Physik – Eine Einführung in Experiment und Theorie, Band II: Elektrodynamik (Springer, Berlin 1980)

© Eine Produktion des Christlichen Buchverlages Groote & Reiß

* Lehrstuhl für Experimentelle Physik II der Universität,
Postfach 500500, 44221 Dortmund

** Forschungszentrum Jülich GmbH, 52425 Jülich

*** Institut für Physik, Arbeitsgruppe ThEP,
Staudinger Weg 7, Postfach 3980, 55099 Mainz

1. Elektrostatik mit Isolatoren

1.1 Ladung und Fernwirkungsgesetz

Seit es Menschen gibt, haben sie mit Respekt auf die elektrischen und magnetischen Erscheinungen in der Natur geschaut, auf die zerstörende Gewalt der Blitze und auf das unheimliche und unerklärliche Polarlicht, das an den äußeren Hemisphären der Erde zu sehen war. Diese Kräfte zu zügeln und zu beobachten schien lange Zeit eine unlösbare Aufgabe zu sein. Zwar beobachtete man auch im kleineren Maßstabe elektrische Vorgänge, wenn man beispielsweise beim Kontakt mit bestimmten Fellen, Textilien oder metallischen Gegenständen einen „Schlag“ bekam. Oder man spürte deutlich die Wirkung des Magnetsteines auf Gegenstände aus Eisen. Aber faßbar waren diese Phänomene nicht.

Experimentieren konnte man erst zu dem Zeitpunkt mit der Elektrizität, als man in der Lage war, diese zu speichern. Raffinierte Erfinder ersannen *Elektrisiermaschinen*, in denen sich Elektrizität anhäufen ließ. Es war der amerikanische Politiker, Schriftsteller und Naturwissenschaftler Benjamin Franklin (1706–1790), der feststellte, daß die Elektrizität sich aus *positiven* und *negativen* Quantitäten zusammensetzen mußte, die er *Ladungen* nannte. So wird der Glasstab, mit Seide oder Katzenfell gerieben, positiv, die Seide oder das Katzenfell im Gegenzug negativ geladen.

Solchermaßen erzeugte elektrische Ladungen konnten über die Entfernung hinweg wirken, stellte der französische Physiker Charles-Augustin de Coulomb (1736 – 1806) fest und entwickelte daraus das *Fernwirkungsgesetz*, das nach ihm *Coulombsches Gesetz* genannt wird und welches die Kraft umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes r sinken läßt. Die Kraft wirkt in Richtung der Verbindungslinie und ist zu den beiden Ladungen q_1 und q_2 proportional. Ferner wirkt sie bei gleichnamigen Ladungen abstoßend, bei ungleichnamigen anziehend. Zusammenfassend ergibt sich dann für diese Kraft

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{mit } r = |\vec{r}| \text{ und } \vec{e}_r = \vec{r}/|\vec{r}|, \quad (1.1)$$

wobei \vec{r} der Radialvektor ist, der entlang der Verbindungslinie auf die Ladung zeigt, an der die Kraft gemessen wird. Die Einheit der elektrischen Ladung trägt ebenfalls Coulombs Namen. $1C$ (*ein Coulomb*) ist dabei die Ladung, die bei der Elektrolyse von Silbernitrat zur Abscheidung von einem Mol Silber führt.

Die *Dielektrizitätskonstante* $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$ schließlich stellt die Proportionalität her. Das Coulombsche Gesetz sagt nichts über das Medium zwischen den beiden Ladungen aus. Es sagt auch nichts darüber aus, ob etwas vorhanden ist, wenn eine der beiden Ladungen fehlt. Es ist ein reines Fernwirkungsgesetz, war aber damals der erste Versuch, die Elektrizität auch mathematisch erfassen zu können. Und dieser erfolgreiche Versuch sollte weitreichende Konsequenzen haben.

1.2 Feldbegriff und Nahwirkungsgesetz

Was ergab sich, wenn man eine der beiden Ladungen sehr klein werden ließ? Übt die andere Ladung also unabhängig von der einen eine Wirkung auf den sie umgebenden Raum aus? Es war eine der Leistungen des großen englischen Experimentators und Analytikers Michael Faraday (1791–1867), diese Wirkung zu erkennen und mit Namen zu benennen: Er führte das *elektrische Feld* ein, das man berechnet, indem man von der Probeladung abstrahiert:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}. \quad (1.2)$$

Jedem Raumpunkt, ausgedrückt durch den Radialvektor \vec{r} aus dem Ursprung, dem Ort der Ladung, wird somit ein Vektor zugeordnet. Wir sprechen von einem *Vektorfeld*. Linien, die tangential an diesen Vektoren entlang laufen, werden als *Feldlinien* bezeichnet.

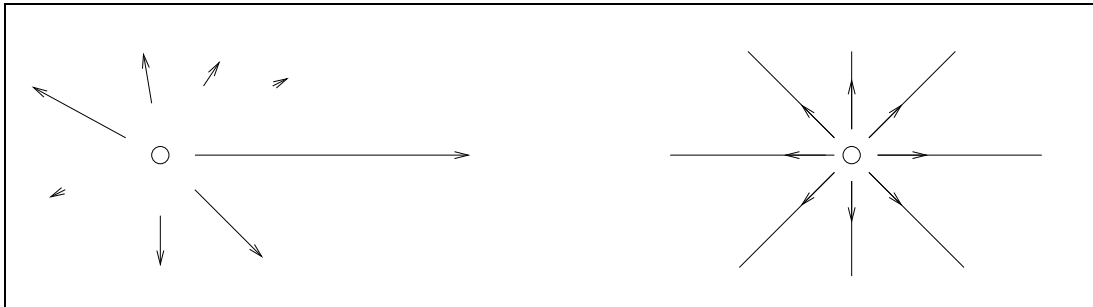


Abb. 1.1 Elektrisches Feld und Feldlinien einer Punktladung

Da das elektrische Feld also gemäß

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (1.3)$$

im direkten Zusammenhang mit der Kraft steht, die eine Probeladung q an einem frei gewählten Raumpunkt durch die Ladung Q erfährt, gilt nun wie bei den Kräften auch das *Superpositionsprinzip*. Dieses besagt, daß sich das elektrische Feld einer Anzahl von Ladungen q_i durch Addition der Felder, also der Feldvektoren in jedem Raumpunkt ergibt,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (1.4)$$

Bisher sind wir von *Punktladungen* ausgegangen, haben die Ladungsverteilung also quasi auf die „nullte Dimension“ beschränkt. Reale geladene Objekte sehen jedoch anders aus. So finden wir hier *Linienladungsdichten* λ in einer, *Flächenladungsdichten* σ in zwei und (*Raum-*)*Ladungsdichten* ρ in drei Dimensionen. Die Multiplikation dieser Größen mit den Ausmaßen der Räume, in und auf denen sie sich befinden, liefert jeweils wieder die Gesamtladung. Um davon ein Bild zu bekommen, wollen wir im folgenden einige Beispiele rechnen.

1.2.1 Der dünne, unendlich lange und homogen geladene Faden

Wir beschränken die Ladungsverteilung zunächst auf eine Dimension, fordern aber, daß die Ladungen darauf *homogen*, d.h. gleichmäßig verteilt sein sollen. Dies wird durch eine konstante Linienladungsdichte λ beschrieben, die in Einheiten C/m anzugeben ist. Der Beobachtungspunkt besitze einen senkrechten Abstand R zum Faden.

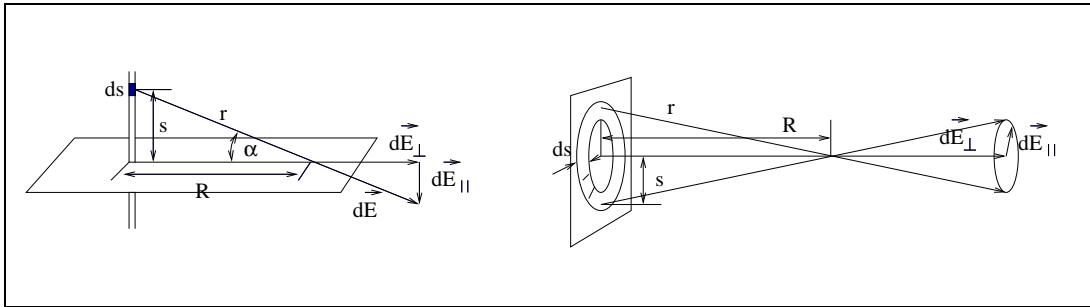


Abb. 1.2 Elektrisches Feld von Faden und Fläche

Dann liefert jedes Fadenstück ds , das ja eine Ladung λds besitzt, einen Beitrag

$$d\vec{E} = \frac{\lambda ds}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos^2 \alpha (\vec{e}_\perp \cos \alpha + \vec{e}_\parallel \sin \alpha) \quad (1.5)$$

zum Gesamtfeld im Beobachtungspunkt. Während sich jedoch die Komponenten des Feldes senkrecht zum Faden aufaddieren, mitteln sich diejenigen parallel zum Faden heraus, wie wir leicht aus Symmetrieüberlegungen schließen können. Wegen $s = R \cdot \tan \alpha$ ist $ds = R d\alpha / \cos^2 \alpha$ und damit

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{E}}{ds} ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\vec{E}}{d\alpha} d\alpha = \\ &= \frac{\lambda \vec{e}_\perp}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{e}_\perp. \end{aligned} \quad (1.6)$$

1.2.2 Die flache, unendlich ausgedehnte Fläche

Wir unterteilen die Fläche in schmale Ringe der Breite ds . Jeder solche Ring besitzt eine Ladung $2\pi\sigma s ds$, wobei σ die homogene Flächenladungsdichte ist. Erneut erkennen wir, daß sich Komponenten parallel zur Fläche herausmitteln. Das Flächenelement trägt mit einer senkrechten elektrischen Feldkomponente

$$d\vec{E} = \frac{2\pi\sigma s ds}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_\perp \cos \alpha \quad (1.7)$$

zum Gesamtfeld bei. Erneut gilt $s = R \cdot \tan \alpha$ und $ds = R d\alpha / \cos^2 \alpha$, ebenso wie $R = r \cos \alpha$, also

$$\vec{E} = \int_0^\infty \frac{d\vec{E}}{ds} ds = \frac{\sigma \vec{e}_\perp}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_\perp. \quad (1.8)$$

1.3 Elektrischer Fluß und Gaußscher Satz

Unter dem *Fluß* versteht man allgemein das Volumen, das pro Zeiteinheit von einer Substanz durchströmt wird. Betrachten wir beispielsweise eine geradlinig mit der Geschwindigkeit v dahinströmende Flüssigkeit. Die Flüssigkeitsmenge, die eine senkrecht zur Strömungsrichtung stehende Fläche Δa in der Zeit Δt durchströmt, erfüllt ein Volumen $\Delta V = \Delta a v \Delta t$. Der Fluß ist also gegeben als $\Phi = \Delta V / \Delta t = v \Delta a$. Ist die Fläche Δa gegen die Strömung um einen Winkel θ geneigt und ist $\Delta a'$ ihre Projektion auf die Ebene senkrecht zu der Strömung, so gilt für den Fluß nach der Parallellogrammregel

$$\Phi = v \Delta a' = v \Delta a \cos \theta = \vec{v} \cdot \Delta \vec{a}. \tag{1.9}$$

Anstelle des *Geschwindigkeitsfeldes* \vec{v} verwenden wir nun das elektrische Feld und definieren so den *Elektrischen Fluß* differentiell als

$$d\Phi := \vec{E} \cdot d\vec{a}, \tag{1.10}$$

wobei $d\vec{a}$ der nach außen zeigende Flächennormalenvektor des Flächenstücks da ist. Der Fluß des elektrischen Feldes einer Punktladung durch eine konzentrische Kugelschale ist leicht aus Gleichung (1.2) zu berechnen. Es ist hier \vec{E} parallel zu $d\vec{a}$ und auf der Kugelschale konstant, damit

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = E \oint da = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}. \tag{1.11}$$

Der auf den deutschen Physiker Carl Friedrich Gauß (1777–1855) zurückgehende *Gaußsche Satz* besagt nun, daß dieser Fluß unabhängig von der Form der um die Ladung gelegten Fläche lediglich von der eingeschlossenen Ladung abhängt. Dies zeigen wir, indem wir die Kugelschale ihrerseits umgeben von einer unregelmäßigen, größeren und ebenfalls geschlossenen Fläche, die einfach zusammenhängend sei, also nicht mehrere Teilvolumina umschließe. Nun projizieren wir die Flächenelemente $d\vec{a}$ der konzentrischen Kugel zentral (d.h. quasi durch eine Lichtquelle im Ladungszentrum) auf die größere Fläche.

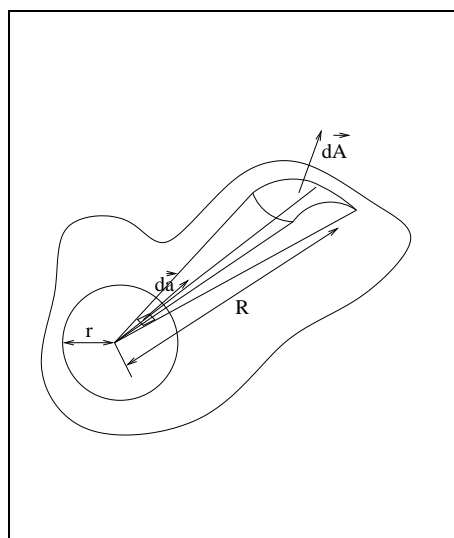


Abb. 1.3 Nachweis des Gaußschen Satzes

Wir betrachten zunächst Bereiche, in denen die Projektion diese Fläche nur einmal trifft und dort ein Flächenstück $d\vec{A}$ sichtbar werden läßt. Es gilt nach dem Strahlensatz $dA \cos \theta = da R^2 / r^2$, wobei R der Abstand dieses Flächenstücks ist, gleichzeitig aber nach dem Coulombschen Gesetz $\vec{E}(R) = \vec{E}(r) r^2 / R^2$ und folglich

$$d\Phi_A = E(R) dA \cos \theta = E(r) da = d\Phi_a \tag{1.12}$$

und damit der Gaußsche Satz in diesen Gebieten gezeigt. Trifft der Projektionsstrahl die umgebende Fläche mehrmals, indem er einmal aus- und dann wieder eintritt, so heben sich die beiden Anteile aus denselben Argumenten wie eben weg, denn die Flächenvektoren sind hier gegeneinander gerichtet. Genauso wird eine zusätzliche Fläche, welche die Ladung nicht umschließt, keinen weiteren Beitrag liefern. Da für das elektrische Feld einzelner Ladungen das Superpositionsprinzip gilt, können wir den Satz auch auf eine beliebige *Ladungsverteilung* ausdehnen und sagen, daß der Fluß durch die Fläche der von ihr eingeschlossenen Ladung entspricht.

Auch zum Gaußschen Satz seien ein paar Beispiele angeführt. Es sind teilweise dieselben wie im letzten Abschnitt, womit die Gültigkeit des Gaußschen Satzes nachgewiesen werden soll.

1.3.1 Fadenfeld mit Gaußschem Satz

Symmetrieüberlegungen wie im letzten Abschnitt überzeugen uns recht schnell davon, daß das elektrische Feld eines unendlich langen und dünnen Fadens senkrecht zu diesem stehen muß. Wir legen nun um den Faden in Gedanken einen Zylinder der Höhe L und des Radius r . Er umschließt demnach eine Ladung λL . Auf der anderen Seite des Gaußschen Satzes (1.11) ist nun die Fluß des elektrischen Feldes durch die einzelnen Flächenstücke zu berechnen. Für Deckel und Boden gilt $\vec{E} \cdot d\vec{a} = 0$, für den Mantel jedoch $\vec{E} \cdot d\vec{a} = E(r)da$ und mithin

$$\frac{\lambda L}{\varepsilon_0} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 2\pi r L E(r) \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}. \quad (1.13)$$

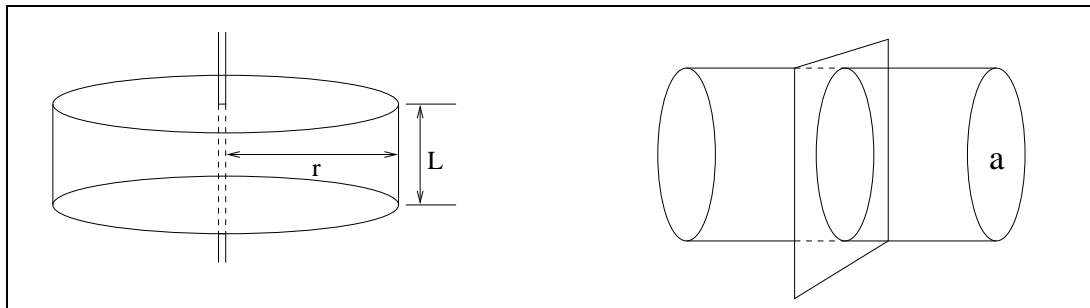


Abb. 1.4 Berechnung des elektrischen Feldes mittels des Gaußschen Satzes

1.3.2 Flächenfeld mit Gaußschem Satz

Wir denken uns diesmal durch die Fläche einen Zylinder gelegt, der zur Fläche senkrecht steht und zu beiden Seiten herauschaut. Wieder erkennen wir leicht, daß das elektrische Feld einer unendlich ausgedehnten Fläche senkrecht zu dieser stehen muß. Daher verschwinden die Flußelemente auf dem Mantel des Zylinders. Die Länge des Zylinders zu beiden Seiten der Ebene ist nach dem Gaußschen Satz beliebig wählbar, denn es wird ja stets dieselbe Ladung σa eingeschlossen. Für Deckel und Boden gilt jeweils $\vec{E} \cdot d\vec{a} = E_0 da$, also

$$\frac{\sigma a}{\varepsilon_0} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 2aE_0 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (1.14)$$

Selbst für nicht homogene Flächenladungen und allgemeine, nicht ebene Flächen gilt weiterhin der Satz, daß die Differenz des elektrischen Feldes beim „Durchgang“ durch die Fläche genau σ/ε_0 entspricht. Dies können wir leicht erkennen, wenn wir den Zylinder genügend klein wählen, so daß die Fläche dort hinreichend eben ist, und gleichzeitig seine Mantelflächen gegen Null laufen lassen. Es ist dann

$$\frac{\sigma a}{\varepsilon_0} = \Phi = aE^+ - aE^- = a\Delta E \quad \Leftrightarrow \quad \Delta E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (1.15)$$

1.3.3 Feld einer homogen geladenen Vollkugel

Als neues Beispiel berechnen wir das elektrische Feld einer homogen geladenen Vollkugel (Radius R), und zwar sowohl außerhalb dieser Kugel als auch in ihrem Innern. ρ sei die homogene Ladungsdichte (Raumladungsdichte). Aus Symmetriegründen ist das elektrische Feld stets radial. Legen wir also konzentrische Schalen um den Mittelpunkt der Vollkugel, so steht das elektrische Feld stets senkrecht auf diesen Schalen und ist konstant. Die Gesamtladung ist

$$Q = \int \rho dV = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho. \quad (1.16)$$

Im Außenbereich wird die gesamte Ladung umschlossen. Daher ist dort

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi r^2 E(r) \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad (1.17)$$

im Innenbereich dagegen gilt

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \int dV = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (1.18)$$

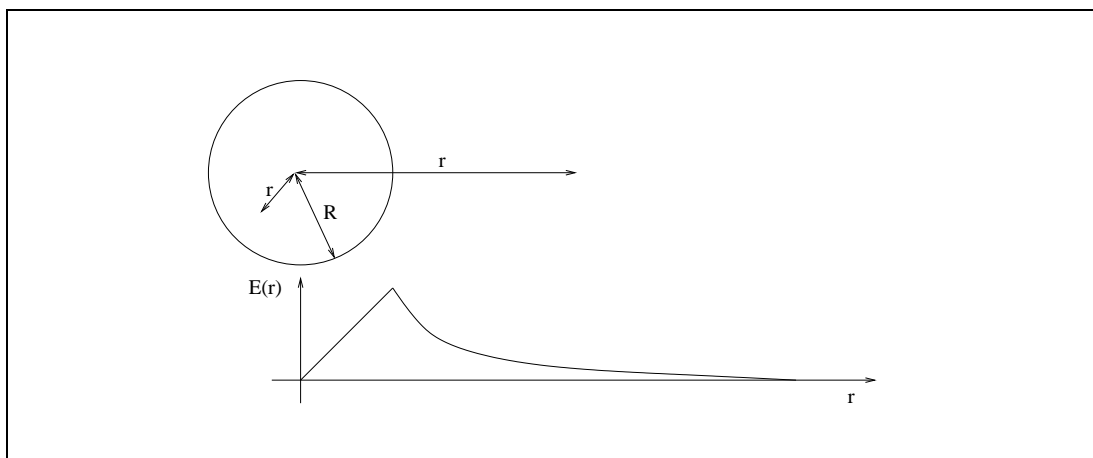


Abb. 1.5 Homogen geladene Vollkugel und ihr elektrisches Feld

1.4 Das elektrostatische Potential

Bewegen wir uns mit einer Probeladung q im Zentralfeld einer Punktladung auf einem geschlossenen Weg, so wird dabei weder Energie erzeugt noch geht welche verloren. Das elektrische Feld ist also ein *konervatives Kraftfeld*. Aus dem Verschwinden der Energie

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.19)$$

auf dem geschlossenen Weg folgt andererseits die Wegunabhängigkeit der Arbeit bei einem nicht geschlossenen Weg. Die Arbeit wird umgesetzt in potentielle Energie, wir können daher jedem Punkt des Raumes eine potentielle Energie zuweisen. Machen wir uns unabhängig von der Probeladung, so weisen wir jedem Punkt des Raumes ein *Potential* $\varphi(\vec{r})$ zu mit

$$\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) := \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0. \quad (1.20)$$

Die Einheit des Potentials ist das *Volt*, benannt nach dem italienischen Physiker Graf Alessandro Volta (1745–1827), $1V = 1\text{kg m}^2 / \text{C s}^2$. Da sowohl potentielle Energie wie auch Potential nur bis auf eine additive Konstante zu bestimmen sind, können wir beispielsweise $\varphi(\vec{r}) = 0$ für $r \rightarrow \infty$ wählen, wobei „ ∞ “ für einen beliebigen feldfreien Punkt in großer Ferne der Ladung steht. Wir wollen wieder einige Beispiele berechnen.

1.4.1 Fadenpotential

Um ein Beispiel auch in seinem dritten Erscheinungsbild zu zeigen, berechnen wir das Potential des unendlich langen, homogen geladenen Fadens. Dazu führen wir die Probeladung auf einem Weg in der Ebene, in der auch der Faden liegt. Da das elektrische Feld senkrecht zum Faden steht, trägt zum Weg nur die Komponente in diese Richtung bei. Wir führen die Ladung nun von einem Punkt mit Abstand r_1 zu einem Punkt mit Abstand r_2 zum Faden. Dann ist für die Potentialdifferenz

$$\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = \int_{r_1}^{r_2} E(r)dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}(\ln r_1 - \ln r_2). \quad (1.21)$$

1.4.2 Ladungsverteilungen

Statt über das elektrische Feld können wir das elektrostatische Potential direkt aus der Ladungsverteilung bestimmen. So erhalten wir für eine Punktladung und für eine Ladungsverteilung aus einzelnen Punktladungen an den Orten \vec{r}_i

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|} \quad \text{bzw.} \quad \varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i(\vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad (1.22)$$

für kontinuierliche Ladungsverteilungen

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{d\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1.23)$$

wobei für $d\rho(\vec{r}')$ durch $\rho(\vec{r}')dV'$, $\sigma(\vec{r}')dA'$ oder $\lambda(\vec{r}')ds'$ zu ersetzen ist, jeweils für eine räumliche, flächige oder fadenförmige Ladungsverteilung.

1.4.3 Potential auf der Symmetrieachse einer homogenen Kreisscheibe

Wir betrachten eine homogen geladene, kreisförmige Scheibe, die in der xy -Ebene liegt und deren Symmetrieachse mit der z -Achse zusammenfällt. Diese Scheibe besitzt einen Radius R , und dieser räumlichen Einschränkung können wir am besten gerecht werden, wenn wir die Fläche in Kreisringe aufteilen. Es ist dann das Flächenelement $da' = 2\pi s ds$, der Abstand des Beobachtungspunktes auf der z -Achse zum Kreisring $\sqrt{s^2 + z^2}$ und somit

$$\varphi(0, 0, z) = \int_0^R \frac{2\pi\sigma s ds}{4\pi\epsilon_0\sqrt{s^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{z^2}). \quad (1.24)$$

Nähern wir uns der Scheibe, so bleibt das Potential endlich. Der Grenzwert ist

$$\varphi(0, 0, 0) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}. \quad (1.25)$$

Für große Abstände liefert die Entwicklung in R^2/z^2

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(0, 0, z) \approx \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{R^2}{2z^2} - 1\right) = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z}, \quad (1.26)$$

von dort aus gesehen erscheint die Scheibe daher als Punktladung.

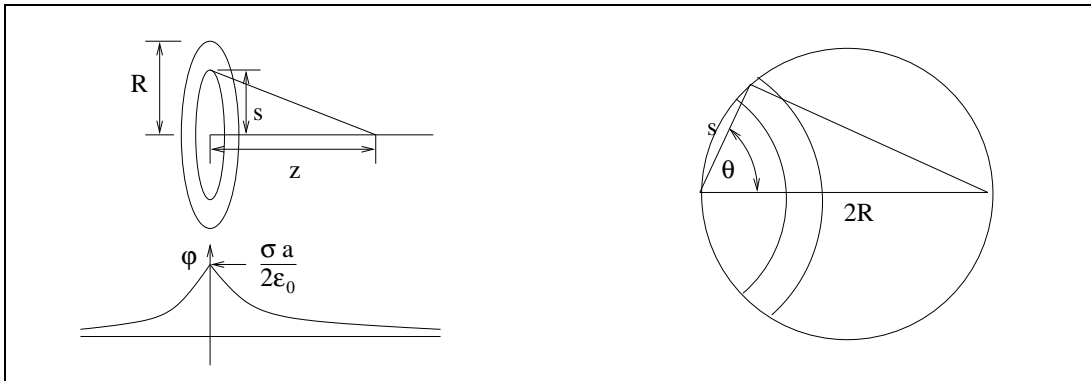


Abb. 1.6 Potential einer homogenen Kreisscheibe (Symmetrieachse und Rand)

1.4.4 Potential am Rand einer homogenen Kreisscheibe

Wieder teilen wir die Scheibe in Kreisringe um den Beobachtungspunkt auf. Diesmal sind dies jedoch nicht volle Kreisringe, sie stoßen vielmehr bei einem Winkel θ an den Rand der Kreisscheibe. Ihre Fläche ist also $da' = 2\theta s ds$. Andererseits gilt nach dem Satz des Thales $s = 2R \cos \theta$, wir erhalten also

$$\begin{aligned} \varphi(R, 0, 0) &= \int_0^{2R} \frac{2\theta\sigma s ds}{4\pi\epsilon_0 s} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\pi/2}^0 2\theta(-2R \sin \theta) d\theta = \quad (1.27) \\ &= \frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \theta \sin \theta d\theta = \frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0} \left[\sin \theta - \theta \cos \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Vergleichen wir dies mit dem Potential im Zentrum der Scheibe, so stellen wir fest, daß das Potential zum Rand hin abnimmt. Wäre die Scheibe aus leitendem Material, so hätte das eine inhomogene Ladungsverteilung zur Folge.

1.5 Die Energie des elektrischen Feldes

Werden positive von negativen Ladungen getrennt, so entsteht ein elektrisches Feld. Gleichzeitig muß Arbeit aufgebracht werden, um diese Trennung zu vollziehen. Es ist daher sinnvoll, dem elektrischen Feld eine Energie zuzuordnen. Um dies zu berechnen, betrachten wir ein gut zu behandelndes Beispiel.

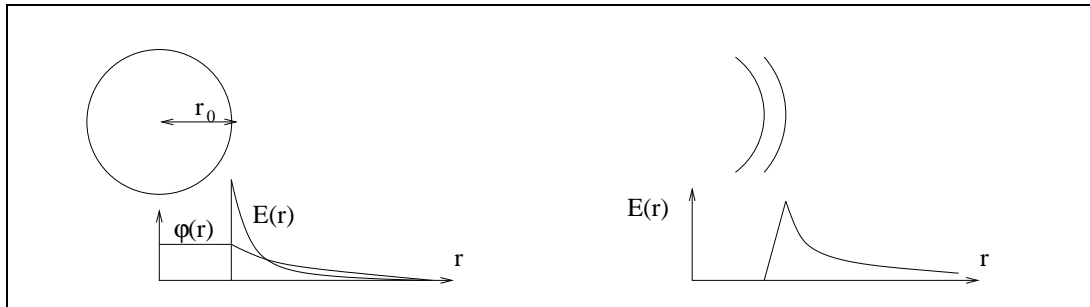


Abb. 1.7 Homogen geladener Luftballon

Ein Luftballon, der als homogen geladene Kugelschale mit veränderlichem Radius betrachtet werden kann, werde auf einen Radius r_0 aufgeblasen. Nach dem Gaußschen Satz besitzt der Luftballon im Innenbereich kein elektrisches Feld, das Außenfeld gleicht dem Feld einer Punktladung Q und ist ebenso wie dieses radialsymmetrisch. Die Gesamtladung Q verändert sich durch das Aufblasen nicht, also auch nicht das Außenfeld. Betrachten wir für einen Moment die Haut des Luftballons nicht als ebenes, sondern dünnes, aber ausgedehntes Gebilde, so erfährt ein Ladungsanteil $dq = Q da/4\pi r_0^2$ in dieser Schicht im Mittel die Kraft

$$d\vec{F} = \frac{1}{2}(\vec{E}(r_0-) + \vec{E}(r_0+))dq = \frac{Q dq \vec{e}_r}{2 \cdot 4\pi \epsilon_0 r_0^2} = \frac{Q^2 da \vec{e}_r}{8\pi r_0^2 \cdot 4\pi \epsilon_0 r_0^2}. \tag{1.28}$$

Das elektrische Feld erzeugt somit einen nach außen gerichteten Druck

$$p = \frac{d|\vec{F}|}{da} = \frac{Q^2}{8\pi r_0^2 \cdot 4\pi \epsilon_0 r_0^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2(r_0+). \tag{1.30}$$

Wird der Ballon weiter aufgeblasen, so fällt dies weniger schwer als bei einem ungeladenen Ballon, denn der Druck leistet zur notwendigen Arbeit einen Beitrag

$$dW = p dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2(r_0+) dV. \tag{1.31}$$

Diese Energie wird dem Feld entzogen, denn dieses wird bei Volumenvergrößerung um das entsprechende Volumen beraubt, das felderfüllte Außenfeld in diesem Bereich also gewissermaßen durch das feldlose Innenfeld ersetzt, ohne daß sich das restliche Außenfeld ändern würde. Die elektrische Feldstärke in diesem Bereich war aber gerade $\vec{E}(r_0+)$. Verallgemeinern wird diese Überlegung, so können wir schließen, daß die *Energie* W eines elektrischen Feldes durch

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \vec{E}^2(\vec{r}) dV \tag{1.32}$$

gegeben ist.

1.6 Vektoranalysis

Wir haben in den Abschnitten 1.3 und 1.4 den Fluß wie auch die Zirkulation eines Vektorfeldes kennengelernt. Die Überlegungen dieses Kapitels sollen nun dahin gerichtet sein, diese Größen auch lokal, also wiederum als Felder, zu erklären. Diese Lokalisierung geschieht durch Feingliederung des Integrationsbereiches. Im folgenden gehen wir ganz allgemein vom Vorliegen eines Vektorfeldes $\vec{F}(\vec{r})$ aus, wobei wir annehmen wollen, daß dieses Feld mindestens zweimal stetig nach den Ortskoordinaten differenzierbar ist.

1.6.1 Fluß und Divergenz

Unterteilen wir ein Volumen V in zwei Volumina V_1 und V_2 , so addieren sich die zugehörigen Flußanteile,

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{a}_1 + \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{a}_2, \quad (1.33)$$

da die Trennfläche einmal als Einstrom- einmal als Ausstromfläche Verwendung findet, ihr Anteil also verschwindet. Die Fläche S , die das Volumen V umrandet, braucht nicht unbedingt geschlossen zu sein. Aufgrund der Additivität des Flusses ist eine lokale Definition möglich. Wenig sinnvoll ist, hier den Fluß selbst zu nehmen, da dieser für immer kleiner werdendes Volumen verschwindet. Sinnvoll dagegen ist die Definition der *Divergenz*

$$\text{div } \vec{F} := \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \oint_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{a}_i \quad (1.34)$$

als einer skalaren Funktion des Ortes. Umgekehrt erhalten wir für den Gesamtfluß durch das Volumen $V = \sum_i V_i$

$$\Phi = \lim_{V_i \rightarrow 0} \sum_i V_i \frac{1}{V_i} \oint_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{a}_i = \int_V \text{div } \vec{F} dV. \quad (1.35)$$

Es ergibt sich also die mathematische Form des *Gaußschen Satzes*,

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \int_V \text{div } \vec{F} dV, \quad (1.36)$$

wobei S die Oberfläche des Volumens V ist.

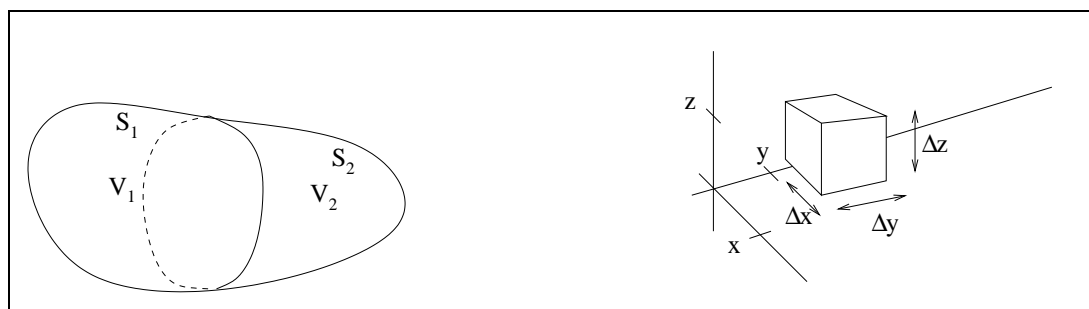


Abb. 1.8 Konstruktion der Divergenz

Wie aber sieht nun die Divergenz in kartesischen Koordinaten aus? Um dies entscheiden zu können, betrachten wir einen Quader der Kantenlängen Δx , Δy und Δz . Der Mittelpunkt des Quaders liege im Punkt (x, y, z) . Dann ist

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \sum_{i=1}^6 \Phi_i, \quad \Phi_i = \vec{F} \cdot d\vec{a}_i. \quad (1.37)$$

So ist

$$\Phi_{\text{oben}} = F_z(z + \frac{1}{2}\Delta z)\Delta x\Delta y \approx \left(F_z(z) + \frac{1}{2}\Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \Delta x\Delta y \quad (1.38)$$

$$\Phi_{\text{unten}} = -F_z(z - \frac{1}{2}\Delta z)\Delta x\Delta y \approx \left(-F_z(z) + \frac{1}{2}\Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \Delta x\Delta y \quad (1.39)$$

$$\Rightarrow \Phi_{\text{oben}} + \Phi_{\text{unten}} = \Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x\Delta y \quad (1.40)$$

und zusammengesetzt

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (1.41)$$

1.6.2 Zirkulation und Rotation

Die *Zirkulation* Γ eines Vektorfeldes \vec{F} ist ebenso wie der Fluß eine additive Größe, es gilt

$$\Gamma = \int_P \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{s}_1 + \int_{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}_2. \quad (1.42)$$

Wir können also auch hier die Fläche in kleine Stücke unterteilen und so die Zirkulation lokalisieren. So definieren wir die *Rotation* (in Richtung der Flächennormalen \vec{n}_i) als

$$\operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}_i = \lim_{A_i \rightarrow 0} \frac{1}{A_i} \oint_{P_i} \vec{F} \cdot d\vec{s}_i. \quad (1.43)$$

Umgekehrt ist

$$\Gamma = \lim_{A_i \rightarrow 0} \sum_i A_i \frac{1}{A_i} \oint_{P_i} \vec{F} \cdot d\vec{s}_i = \lim_{A_i \rightarrow 0} \sum_i \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}_i A_i = \int_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{a}, \quad (1.44)$$

es ergibt sich der mathematische *Stokessche Satz*

$$\int_P \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{a}, \quad (1.45)$$

(benannt nach dem englischen Physiker Sir George Gabriel Stokes (1819–1903)) wobei P der Weg uhrzeigergegenläufig um die nach vorne gerichtete Fläche ist.

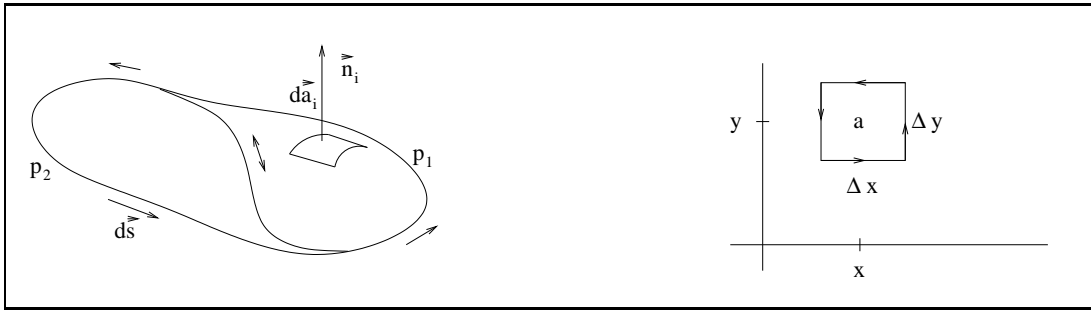


Abb. 1.9 Konstruktion der Rotation

Auch hier wollen wir die Rotation in kartesischen Koordinaten berechnen. Dazu betrachten wir ein Rechteck in der (x, y) -Ebene. Der Flächennormalenvektor weist in z -Richtung. Dann ist

$$\Gamma = \sum_{i=1}^4 \vec{F} \cdot d\vec{s}_i \quad \text{mit} \quad (1.46)$$

$$\Gamma_{\text{rechts}} = F_y(x + \frac{1}{2}\Delta x)\Delta y \approx \left(F_y(x) + \frac{1}{2}\Delta x \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \Delta y \quad (1.47)$$

$$\Gamma_{\text{links}} = -F_y(x - \frac{1}{2}\Delta x)\Delta y \approx \left(-F_y(x) + \frac{1}{2}\Delta x \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \Delta y \quad (1.48)$$

$$\Gamma_{\text{oben}} = F_x(y + \frac{1}{2}\Delta y)\Delta x \approx \left(-F_x(y) - \frac{1}{2}\Delta y \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta x \quad (1.49)$$

$$\Gamma_{\text{unten}} = F_x(y - \frac{1}{2}\Delta y)\Delta x \approx \left(F_x(y) - \frac{1}{2}\Delta y \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta x \quad (1.50)$$

$$\Rightarrow \Gamma = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \quad (1.51)$$

Die Rotation ist also ein Vektor mit den Komponenten

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)^T. \quad (1.52)$$

1.6.3 Differenz und Gradient

Wie eine Fläche ein Volumen und ein Weg eine Fläche einschließen kann, so schließen zwei Punkte einen Weg ein. So bildlich gesprochen ist die Berechnung der Differenz

$$f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1) \quad (1.53)$$

eine nahezu triviale, aber eben eine Fortsetzung der Problematik der beiden vorangegangenen Unterabschnitte. Auch dieser Weg läßt sich in kleine Abschnitte aufteilen, und wir definieren den *Gradient* als

$$\text{grad } f \cdot \vec{t}_i = \lim_{s_i \rightarrow 0} \frac{1}{s_i} (f(\vec{r}_{i+1}) - f(\vec{r}_i)), \quad (1.54)$$

wobei \vec{t}_i der Tangentialvektor an das Wegstück ist. Es ergibt sich hier

$$\begin{aligned} f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1) &= \lim_{s_i \rightarrow 0} \sum_i s_i \frac{1}{s_i} (f(\vec{r}_{i+1}) - f(\vec{r}_i)) = \\ &= \lim_{s_i \rightarrow 0} \sum_i \text{grad } f \cdot \vec{t}_i s_i = \int_1^2 \text{grad } f \cdot d\vec{s}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Zur kartesischen Berechnung des Gradienten betrachten wir ein Wegstück in Richtung der x -Achse. Dann ist

$$f(x + \frac{1}{2}\Delta x, y, z) - f(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z) \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x, \quad (1.56)$$

folglich

$$(\text{grad } f)_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (1.57)$$

und insgesamt

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)^T. \quad (1.58)$$

1.6.4 Nabla-Operator und Laplace-Operator

Sowohl Gradient als auch Divergenz und Rotation lassen sich einheitlich beschreiben. Verwendung findet hier der *Nabla-Operator*

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T. \quad (1.59)$$

Der Nabla-Operator ist ein Differentialoperator, seine Komponenten wirken auf die „nach ihm“ stehenden Funktionen. Läßt man diese Operatoreigenschaft außer Betracht, so verhält sich diese Größe wie ein Vektor. So kann mit ihm sowohl das Skalar- wie das Kreuzprodukt gebildet werden. Und gerade hierauf beruht seine Bedeutung für Divergenz und Rotation, denn es ist

$$\nabla \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F} \quad \text{und} \quad \nabla \times \vec{F} = \text{rot } \vec{F}, \quad \text{ferner} \quad \nabla f = \text{grad } f. \quad (1.60)$$

Leicht überzeugt man sich von diesen Identitäten, ebenso auch von

$$\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0, \quad \text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \times (\nabla f) = \vec{0}. \quad (1.61)$$

Die Kombination

$$\text{div}(\text{grad } f) = \nabla \cdot \nabla f =: \Delta f \quad (1.62)$$

verschwindet jedoch nicht identisch, sie definiert einen neuen Operator $\Delta = \nabla^2$, den *Laplace-Operator*. Eine Funktion f mit $\Delta f = 0$ heißt *harmonisch* und besitzt die Eigenschaft, ihre Extrema lediglich auf dem Rand liegen zu haben. In kartesischen Koordinaten besitzt der Laplace-Operator die Gestalt

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.63)$$

1.6.5 Vektoranalysis des elektrostatischen Feldes

Für alle in diesem Abschnitt bisher besprochenen Größen gibt es Gegenstücke in der Elektrostatik. Die entscheidenden Hinweise dafür ergeben sich aus dem (physikalischen) Gaußschen Satz in Form von Gleichung (1.11) und dem Stokeschen Satz aus der Gleichung (1.20). Wir entnehmen ihnen und den mathematischen Gegenstücken die differentiellen Formen dieser Gleichungen,

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.64)$$

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \oint_P \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}. \quad (1.65)$$

Ferner entnehmen wir dem ersten Anteil von Gleichung (1.20) eine Konstruktion des elektrischen Feldes aus dem Potential, wozu wir Gleichung (1.55) verwenden:

$$\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = \int_1^2 \operatorname{grad} \varphi \cdot d\vec{s} = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = - \operatorname{grad} \varphi. \quad (1.66)$$

Während sich Gleichung (1.65) direkt hieraus ergibt und damit zeigt, daß $\vec{E}(\vec{r})$ ein *konservatives* Feld ist (für das sich also ein Potential finden läßt), liefert Gleichung (1.64) umgekehrt die *Poissongleichung*

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = - \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}). \quad (1.67)$$

Zum Abschluß leiten wir noch eine Beziehung her, die allgemeiner unter dem Namen *Greenscher Satz* bekannt ist und in unserem Fall eine andere Formel für die Energie des elektrischen Feldes liefert. Dazu integrieren wir den Ausdruck $\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi) = \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi)$ über ein Volumen V . Der (mathematische) Gaußsche Satz liefert dann zusammen mit der Produktregel $\nabla \cdot (f\vec{v}) = (\nabla f) \cdot \vec{v} + f(\nabla \cdot \vec{v})$

$$\begin{aligned} \oint_S \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{a} &= \int_V \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) dV = \int_V (\nabla \varphi)^2 dV + \int_V \varphi \Delta \varphi dV \quad \Leftrightarrow \\ - \oint_S \varphi \vec{E} \cdot d\vec{a} &= \int_V \vec{E}^2 dV - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \varphi dV. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Ist das Volumen groß genug gewählt, daß am Rand das Produkt aus Potential und elektrischem Feld, das ja als Integrand auf der linken Seite der Gleichungskette steht, verschwindet, so erhalten wir

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V \vec{E}^2(\vec{r}) dV = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV. \quad (1.69)$$

2. Elektrostatik mit Leitern

2.1 Das Oberflächenfeld eines Leiters

Unter einem Leiter versteht man ein Material mit beweglichen Ladungsträgern. Die Atomphysik belehrt uns, daß es sich bei diesen Ladungsträgern um Elektronen handelt, die nicht zur Bindung dienen (Valenzelektronen), sondern sich in einem nicht voll aufgefüllten Energiebereich, dem *Leitungsband*, bewegen. Doch diese atomaren Hintergründe wollen wir vorerst unberücksichtigt lassen.

2.1.1 Feld einer geladenen Grenzschicht

Wie bereits im letzten Kapitel, so können wir auch allgemein Überlegungen anstellen, wie die Bereiche des elektrischen Feldes dicht über und unter einer geladenen Grenzschicht miteinander in Beziehung stehen. Eine Hilfestellung bieten uns wieder Gaußscher und Stokesscher Satz.

In einem ersten Schritt legen wir eine flache runde Dose in die Schicht und lassen deren Höhe schrumpfen. Der Gaußsche Satz verknüpft nun den Fluß des elektrischen Feldes durch die Oberfläche, die sich nach dem Schrumpfungsprozeß nur noch auf Deckel und Boden konzentriert, mit der Ladung im ebenfalls schrumpfenden Volumen. Allgemein ist

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV. \quad (2.1)$$

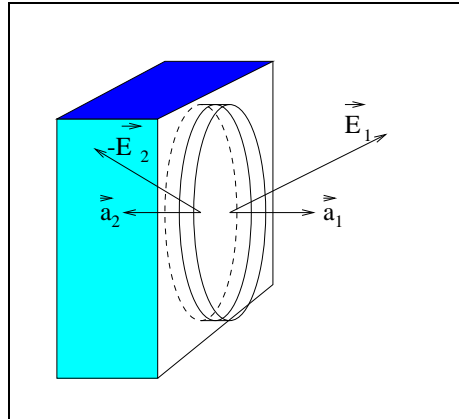


Abb. 2.1 Normalenfeld der Grenzschicht

In unserem Fall besteht die linke Seite aus zwei Anteilen, die durch die äußeren Flächenvektoren $\vec{a}_1 := \vec{a}$ und $\vec{a}_2 = -\vec{a}$ charakterisiert werden. Wir wollen annehmen, daß das elektrische Feld im Bereich der Dose jeweils konstant sei. Dann ist

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \vec{E}_1 \cdot \vec{a}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{a}_2 = (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \vec{a} = (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \vec{e}_\perp a. \quad (2.2)$$

Auf der anderen Seite ist $\rho dV = \sigma da$ zu setzen, denn die Dose umschließt schließlich nicht viel mehr als ein Flächenstück. Auch hier gehen wir von konstanter Flächenladungsdichte aus. Dann ist

$$\int \rho dV = \int \sigma da = \sigma a. \quad (2.3)$$

Insgesamt kürzt sich die Fläche heraus, doch nur die Projektion des elektrischen Feldes auf die Flächennormale geht in die Gleichung ein, wir erhalten

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{e}_\perp = \vec{E}_2 \cdot \vec{e}_\perp + \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.4)$$

Nun betrachten wir einen rechteckigen Weg, der teils dicht über, teils dicht unter der Grenzschicht entlangläuft, und wieder lassen wir die zur Schicht senkrechten Wegstücke schrumpfen. Der Stokessche Satz

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.5)$$

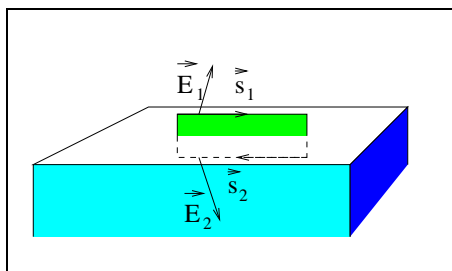


Abb. 2.2 Tangentialfeld der Grenzschicht

liefert also im wesentlichen nur Beiträge von den beiden zur Schicht parallelen Wegelementen $\vec{s}_1 =: \vec{s}$ und $\vec{s}_2 = -\vec{s}$, die Integration liefert daher

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \vec{E}_1 \cdot \vec{s}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{s}_2 = (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \vec{s} = (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \vec{e}_{\parallel} s = 0. \quad (2.6)$$

Hier tragen nur die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes bei, und da die Richtung von \vec{s} beliebig zu wählen ist, gilt für jeden Einheitsvektor \vec{e}_{\parallel} parallel zur Grenzschicht

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{e}_{\parallel} = \vec{E}_2 \cdot \vec{e}_{\parallel}. \quad (2.7)$$

2.1.2 Abhängigkeit des Feldes von der Leitungseigenschaft

Die Vorgabe eines Feldes \vec{E}_2 dicht unter der Grenzschicht bestimmt also eindeutig das Feld \vec{E}_1 dicht über der Grenzschicht. Im Falle des Leiters ist diese Vorgabe nun klar: Aufgrund der freien Beweglichkeit der Ladungsträger bewegen diese sich so, daß sie sich im Kräftegleichgewicht befinden. Das bedeutet aber, daß das elektrische Feld im Leiter verschwindet. Knapp über der Oberfläche erhalten wir daher

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{\perp}. \quad (2.8)$$

2.2 Äquipotentialflächen

Die Tatsache, daß die elektrischen Feldlinien senkrecht auf Metalloberflächen stehen, hat Konsequenzen für das Potential. Dieses berechnet sich ja bekanntlich ans Wegintegral über das elektrische Feld. Führen wir diesen Weg nun dicht an der Oberfläche entlang, so erhält dieses Wegintegral keinen Beitrag, da das Feld stets senkrecht zum Weg steht. Daher verändert sich das Potential entlang der Oberfläche nicht, besitzt einen konstanten Wert. Wir sprechen hier von einer *Äquipotentialfläche*.

Das Konzept der Äquipotentialfläche ist auch allgemein zu verwenden: Äquipotentialflächen sind Flächen konstanten Potentials in einem elektrischen Feld, und diese stehen nach der eben vorgebrachten Begründung stets senkrecht auf den Feldlinien. Feldlinienbilder und Bilder der Äquipotentialflächen sind also äquivalente Darstellungen des elektrischen Feldes. Man gewinnt das elektrische Feld aus dem Gradienten des Potentials,

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (2.9)$$

denn dieser steht eben senkrecht auf den Äquipotentialflächen und weist in Richtung des steilsten Anstiegs des Potentials.

2.2.1 Als Konsequenz: Der Faradaysche Käfig

Die Eigenschaft einer Leiteroberfläche (und überhaupt jeder leitenden Verbindung), Äquipotentialfläche zu sein, hat unmittelbar praktische Konsequenzen. Eine davon ist die, daß man vollständig von einem Metallgerüst umgebene Räume vor elektrostatischen Einflüssen von außen schützen kann. Im Alltagsleben bedeutet dies, daß ein Mensch in einem Auto mit Metallkarosserie gegen Blitzeinschläge gefeit ist. Ein solches Metallgerüst oder Käfig wird allgemein als *Faradayscher Käfig* bezeichnet.

Die beschriebene Konsequenz läßt sich rein mathematisch begründen. Das Potential des Innenraums eines solchen Käfigs ist Lösung der ladungsfreien Poissongleichung oder *Laplacegleichung*

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.10)$$

mit der Randbedingung, daß das Potential am Rand einen konstanten Wert φ_0 besitze. Es handelt sich um ein *Dirichletsches Randwertproblem*, das sich eindeutig lösen läßt. Die (mögliche) Lösung $\varphi(x, y, z) = \varphi_0$ ist damit auch die einzige, das elektrische Innenfeld verschwindet, ganz egal, wie die Ladungen im Metall durch Feldeinflüsse von außen verschoben sein mögen.

2.2.2 Die elektrostatische Influenz

Die Ladungsverschiebung, die beim Wirken einer äußeren Ladung auf eine Metalloberfläche auftritt, läßt sich mit Hilfe eines *Elektrometers* messen. Es handelt sich dabei um eine Metallnadel, die mit ihrer Aufhängung leitend verbunden ist. Wird das Elektrometer nun geladen, so stoßen sich Ladungsträger auf Nadel und Aufhängung gegenseitig ab, es kommt zum Ausschlag des Meßinstruments. Mit diesem einfachen Gerät, das jedoch nicht das *Vorzeichen* der Ladung anzeigt, wies Michael Faraday diesen Ladungsverschiebungseffekt nach, den er *elektrostatische Influenz* nannte. Eine solche Versuchsreihe ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Als Reservoir für Ladungen wirkt hier die sogenannte „Erde“, ein genügend großer elektrischer Leiter mit dem Potential $\varphi = 0$. Der Kasten, zwischenzeitig „geerdet“, also mit dieser „Erde“ in Kontakt gebracht, wird elektrisch neutral.

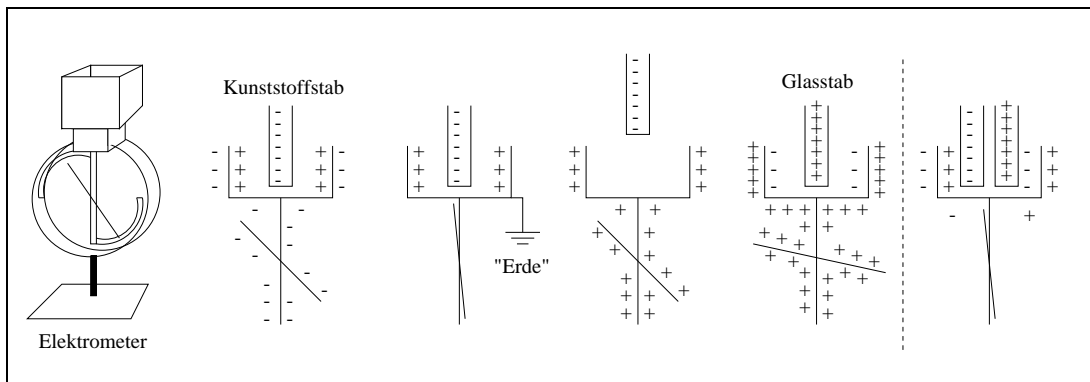


Abb. 2.3 Experimentierkette zur elektrostatischen Influenz

2.2.3 Das Feldelektronenmikroskop

Das *Feldelektronenmikroskop* enthält als Kernstück zwei metallene Kugeln sehr unterschiedlicher Größe, die leitend miteinander verbunden sind. Mit Hilfe dieser Anordnung gelingt es, auf der kleineren der beiden Kugeln eine hohe Ladungsdichte und damit ein besonders starkes elektrisches Feld zu erzeugen. Im Feldelektronenmikroskop bewirkt das elektrische Feld den Austritt von Elektronen. Diese passieren eine Probe (beispielsweise Wolfram) und geben auf einem Fluoreszenzschirm ein nach dem deutschen Physiker Max Felix Theodor von Laue (1879–1960) benanntes inverses Bild des Kristalls wieder.

Ausgangspunkt für die Rechnung ist die Tatsache, daß die Oberfläche der gesamten Anordnung eine Äquipotentialfläche darstellt. Es sei q_1 die Ladung der kleinen und q_2 die Ladung der großen Kugel und r_1 bzw. r_2 ihre Radien. Dann ist

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \text{jedoch}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \frac{4\pi\epsilon_0 r_2^2}{q_2} = \frac{q_1 r_2^2}{q_2 r_1^2} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1 \epsilon_0}{\epsilon_0 \sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.11)$$

2.3 Die Methode der Bildladung

Eingeladen werden soll zu folgendem *Gedankenexperiment*:

Zwei Ladungen q und $-q$ seien in den Punkten $(0, 0, h)$ und $(0, 0, -h)$ befestigt. Aus Symmetrieüberlegungen können wir schließen, daß die Äquipotentialfläche des Feldes dieser Ladungen, die durch den Ursprung geht, eben ist und senkrecht zur z -Achse steht, und das das Potential dieser Fläche $\varphi = 0$ ist. Aus diesem Grunde können wir an dieser Stelle eine geerdete dünne Platte einschieben, ohne daß sich das Potential und mithin das elektrische Feld ändert. Durch dieses Feld werden jedoch in der Platte Ladungen getrennt.

Nun streuen wir Watteflusen auf die Ladung bei $(0, 0, -h)$. Diese werden an der Punktladung aufgeladen und fliegen zur Platte, wo sie wiederum entladen werden. Das Potential der Platte ändert sich dadurch nicht, da sie ja geerdet ist. Der Halbraum $z < 0$ wird dadurch feldfrei, die Situation ist nun nur noch von einer Punktladung und einer geerdeten Platte bestimmt. Diese kann nun auch jede beliebige Dicke besitzen.

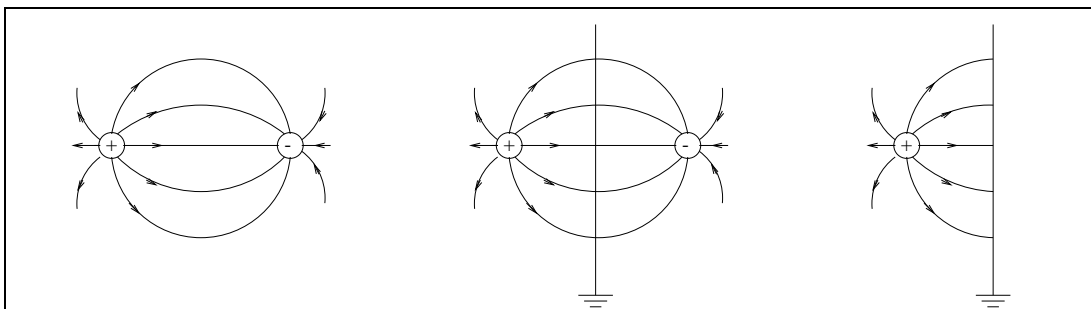


Abb. 2.4 Schritte des Gedankenexperiments

Wir können die ganze Angelegenheit aber auch umdrehen: Statt das Feld einer geerdeten Platte mit einer Punktladung zu berechnen, können wir ebensogut eine fiktive Punktladung mit entgegengesetztem Vorzeichen durch Spiegelung an der Leiteroberfläche „erzeugen“ und deren Feld mit dem der Punktladung überlagern. Diese Ladung wird aus diesem Grunde als *Bildladung* bezeichnet. Wir wollen das eben betrachtete Beispiel berechnen und überlagern dazu die (in Zylinderkoordinaten dargestellten) elektrischen Felder von Ladung und Bildladung,

$$\vec{E}_{\pm}(r, \phi, z) = \frac{\pm q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(z \mp h)\vec{e}_z + r\vec{e}_r}{\sqrt{(z \mp h)^2 + r^2}^3}. \quad (2.12)$$

Zusammen mit Gleichung (2.8) ergibt sich das Gesamtfeld und damit die Flächenladungsdichte auf der Metallfläche $z = 0$

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, \phi, 0) = E_+(r, \phi, 0) + E_-(r, \phi, 0) &= \frac{-2qh\vec{e}_z}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(h^2 + r^2)^3}} = \frac{\sigma(r, \phi)}{\epsilon_0} \vec{e}_z \\ \Rightarrow \sigma(r, \phi) = \sigma(r) &= \frac{-qh}{2\pi\sqrt{(h^2 + r^2)^3}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Um das Prinzip der Bildladung zu prüfen, berechnen wir die Gesamtladung auf der Metalloberfläche. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} q_F &= \int \sigma da = \frac{-qh}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{r dr}{\sqrt{(h^2 + r^2)^3}} = -qh \int_0^\infty \frac{r dr}{\sqrt{(h^2 + r^2)^3}} = \\ &= qh \int_{1/h}^0 d\rho = qh\left(0 - \frac{1}{h}\right) = -q \quad \text{mit der Substitution} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\rho(r) = \frac{1}{\sqrt{h^2 + r^2}}, \quad \rho(0) = \frac{1}{h}, \quad \rho(\infty) = 0, \quad d\rho = \frac{-r dr}{\sqrt{(h^2 + r^2)^3}}. \quad (2.15)$$

Die Gesamtladung der Oberfläche ist also gleich der fiktiven Punktladung, von der wir ausgegangen waren. Die berechnete Flächenladungsdichte kann uns nun wiederum dazu dienen, die Kraft der Oberfläche auf die Punktladung zu berechnen. Es ist dies

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma(r)(h\vec{e}_z - r\vec{e}_r) da}{\sqrt{(h^2 + r^2)^3}} = \frac{qh\vec{e}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{\sigma(r)r dr}{\sqrt{(h^2 + r^2)^3}} = \\ &= -\frac{q^2 h^2 \vec{e}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{r dr}{(h^2 + r^2)^3} = \frac{q^2 h^2 \vec{e}_z}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4} \int_{1/h^4}^0 d\tau = \frac{-q^2 \vec{e}_z}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dabei fiel die Integration über die Radialkomponente des Ortsvektors weg, ferner benutzten wir die Substitution

$$\tau(r) := \frac{1}{(h^2 + r^2)^2}, \quad \tau(0) = \frac{1}{h^4}, \quad \tau(\infty) = 0, \quad d\tau = \frac{-4r dr}{(h^2 + r^2)^3}. \quad (2.17)$$

Wir erkennen, daß dies die Kraft ist, die sich die beiden Punktladungen q und $-q$ im Abstand $2h$ angezogen hätten. Also greift auch hier das Modell. Mit der gleichen, aber entgegengesetzten Kraft wird die Oberfläche von der Punktladung angezogen. Sie ist damit also nicht gleich der Kraft, die das elektrische Feld auf die Ladungsverteilung ausübt, sondern gerade die Hälfte und steht mit der Energiedichte des elektrischen Feldes in Verbindung:

$$F_z = \frac{1}{2} \int_A \sigma E_z da = \frac{1}{2} \int_A (\varepsilon_0 E_z) E_z da = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_A \vec{E}^2 da. \quad (2.18)$$

Dies hat erneut seine Begründung darin, daß das elektrische Feld auch einen Anteil der Platte enthält, die jedoch nicht auf sich selbst zurückwirken kann.

2.4 Plattenkondensator und Kapazität

Der *Plattenkondensator* wird idealisiert beschrieben durch die Aneinanderlagerung zweier unendlich ausgedehnter homogen geladener Platten unterschiedlichen Vorzeichens. Diese Anordnung ist auch als Anordnung von Leitern stabil, da eine homogene Ladungsverteilung ein homogenes elektrisches Feld erzeugt, welches wiederum für eine homogene Ladungsverteilung auf der anderen Platte sorgt. Im Normalfall wird eine solche Situation natürlich nie erreicht, aber ein endlich ausgedehnter *Kondensator* mit hinreichend dicht aneinanderliegenden Platten wird hierdurch bereits recht gut beschrieben.

Das elektrische Feld einer Einzelplatte ist vom Abstand unabhängig und besitzt die Größe $\vec{E} = \sigma \vec{e}_\perp / 2\varepsilon_0$. Für zwei nebeneinanderliegende Platten mit entgegengesetzt gleicher Flächenladungsdichte bedeutet dies, daß sich das Feld im Außenbereich weghebt, während es sich im Innenbereich zu

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_\perp \quad (2.19)$$

addiert. Die Potentialdifferenz oder *Spannung* der Anordnung ist

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = \int_-^+ \vec{E} d\vec{s} = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} \quad (2.20)$$

für einen Plattenabstand d . Bei einem Kondensator mit endlicher Ausdehnung können wir schließlich die Ladung (einer Platte) mit der Spannung in Verbindung bringen, indem wir die Gleichung (2.20) über die Fläche integrieren. Wir erhalten

$$Q = \int_A \sigma da = \sigma A = \frac{\varepsilon_0 A}{d} U =: CU. \quad (2.21)$$

Die Proportionalitätskonstante C wird als *Kapazität* bezeichnet und nach Michael Faraday in der Einheit *Farad* (F) angegeben. Üblicher sind jedoch die Einheiten Mikrofarad (μF), Nanofarad (nF) und Picofarad (pF).

2.4.1 Energie des Plattenkondensators

Die Energie des Plattenkondensators läßt sich wieder anhand eines Gedankenexperiments bestimmen. Dazu entferne ich aus der, sagen wir, unteren Platte ein Quantum an Ladung und bringe sie auf die obere Platte, wo sich diese Ladung gleichmäßig verteilt und mit den entgegengesetzt geladenen „Löchern“ auf der unteren Platte ein elektrisches Feld aufbaut. Die Arbeit ist beim nächsten Transport nun gegen dieses elektrische Feld, also die Spannungsdifferenz zu leisten. Differentiell ergibt sich für die zu leistende Arbeit

$$dW = U(Q)dQ = \frac{Q}{C}dQ. \quad (2.22)$$

Diesen Vorgang führen wir so lange aus, bis die gewünschte Ladung auf der oberen Platte vorhanden ist. Die geleistete Arbeit und damit die Energie des elektrischen Feldes ist gleich dem Integral über den Ausdruck in Gleichung (2.22),

$$W = \frac{1}{C} \int_0^Q Q' dQ' = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2. \quad (2.23)$$

Drücken wir die Kapazität durch ihr geometrischen Eigenschaften, die Spannung aber durch die elektrische Feldstärke aus, so gelangen wir erneut zur Energie des elektrischen Feldes,

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \cdot Ad. \quad (2.24)$$

2.4.2 Kraft zwischen den Kondensatorplatten

Die Kraft zwischen den Kondensatorplatten bestimmt sich am bequemsten nach dem *Prinzip der virtuellen Verrückung*. Dieses Prinzip geht davon aus, daß der Energiezuwachs des elektrischen Feldes durch die Arbeit geleistet wird, welche die Platten um eine Differenz Δd weiter auseinanderrückt. Dabei ist von Bedeutung, ob die Ladung auf den Platten oder die Spannung konstant gehalten wird. Bei konstanter Ladung ergibt sich

$$\Delta W = \Delta\left(\frac{Q^2}{2C}\right) = \frac{1}{2} Q^2 \Delta\left(\frac{d}{\varepsilon_0 A}\right) = \frac{1}{2} Q^2 \frac{\Delta d}{\varepsilon_0 A} = \frac{Q^2}{2C} \frac{\Delta d}{d} = F \Delta d \quad (2.25)$$

und damit

$$F = \frac{Q^2}{2C} \frac{1}{d} = \frac{1}{2} CU^2 \frac{1}{d} = \frac{1}{2} QE. \quad (2.26)$$

Bei konstanter Spannung ergäbe sich, betrachteten wir nur den Kondensator für sich, eine Absenkung der Energie:

$$\Delta W = \Delta\left(\frac{1}{2} CU^2\right) = \frac{1}{2} U^2 \Delta\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right) = -\frac{1}{2} U^2 \varepsilon_0 A \frac{\Delta d}{d^2} = -\frac{1}{2} CU^2 \frac{\Delta d}{d}. \quad (2.27)$$

Hinzu kommt nun jedoch die Energie der Batterie. Durch das Auseinanderziehen der Platten wird ebenfalls die Ladung auf den Platten verringert,

$$\Delta Q = U \Delta \left(\frac{\epsilon_0 A}{d} \right) = -Q \frac{\Delta d}{d}, \tag{2.28}$$

so daß diese zur Batterie zurückfließen und ihre Energie um

$$\Delta W_B = \int_Q^{Q+\Delta Q} U dQ' = U \Delta Q = UQ \frac{\Delta d}{d} = CU^2 \frac{\Delta d}{d} \tag{2.29}$$

erhöhen kann. Auch das Feld der Batterie zählt zum Feld, das durch das Auseinanderziehen der Platten verändert wird. Es ist daher

$$\Delta W + \Delta W_B = -\frac{1}{2}CU^2 \frac{\Delta d}{d} + CU^2 \frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{2}CU^2 \frac{\Delta d}{d} = F \Delta d, \tag{2.30}$$

also wie bisher $F = \frac{1}{2}QE$.

2.4.3 Abweichungen vom idealen Plattenkondensator

Eine Tabelle soll die Abweichung der Kapazität C eines Kondensators mit kreisförmigen Platten des Radius R von der Kapazität $C_0 = \epsilon_0 A/d$ des idealen Plattenkondensators darstellen.

$R =$	$5d$	$20d$	$100d$
$C =$	$1.286C_0$	$1.167C_0$	$1.023C_0$

2.4.4 Kondensatorschaltungen

Kondensatoren lassen sich als Schaltelemente verwenden. Ihr spezifische Eigenschaft ist es, Ladungen zu speichern. Dies drückt sich durch die Angabe der Kapazität aus. Man kann leicht die Kapazität einer Zusammenschaltung von Kondensatoren berechnen.

Bei der *Parallelschaltung* der Kondensatoren liegt an jedem Kondensator dieselbe Spannung. Daher ist die Gesamtladung auf allen Kondensatorplatten

$$Q = \sum_i Q_i = \sum_i C_i U =: CU \Rightarrow C = \sum_i C_i. \tag{2.31}$$

Bei der *Serienschaltung* ist aufgrund von Ladungstrennung die Ladung jeweils zweier Kondensatoren gleich. Daher ist hier die Gesamtspannung

$$U = \sum_i U_i = \sum_i \frac{Q}{C_i} =: \frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}. \tag{2.32}$$

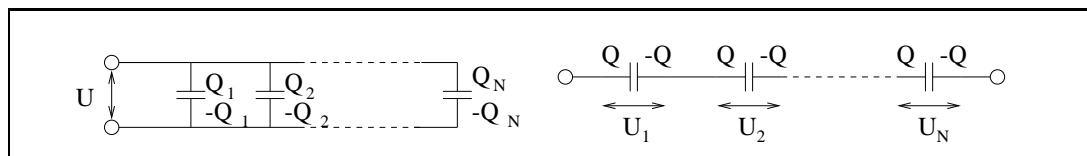


Abb. 2.5 Parallel- und Serienschaltung von Kondensatoren

3. Elektrostatik mit Materie

Schieben wir zwischen die Platten eines Kondensators nichtleitende Materie, so verändert sich die Kapazität. Es gilt

$$C = \epsilon \epsilon_0 \frac{A}{d}. \quad (3.1)$$

Material:	Luft	Kochsalz	Germanium	Wasser	Pyrexglas
$\epsilon =$	1.0006	6.1	16.7	80	4

Auch auf nicht frei bewegliche Ladungsträger hat das statische elektrische Feld also einen Einfluß. Wir wollen in diesem Kapitel zu erklären versuchen, wie diese Wirkung auf die nichtleitende Materie, hier *Dielektrikum* genannt, im Detail vor sich geht und wie sich dadurch die makroskopischen Größen ändern.

3.1 Entwicklung nach Momenten

Wie ein Dielektrikum geladen? Zunächst einmal ungeladen, wird man sagen – und damit eigentlich recht behalten, wenn man diese Materie aus weiter Entfernung betrachtet. Doch rückt man näher heran, so kann man leichte Unebenheiten erkennen. Sie werden durch die Ladungsdichte $\rho(\vec{r}')$ beschrieben und haben Auswirkungen auf das elektrostatische Potential,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.2)$$

Wir schreiben nun $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}$ und entwickeln dies in die Größe r'/r , die für große Abstände von der Ladungsverteilung klein wird. Dabei verwenden wir die Formel

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \simeq 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots \quad (3.3)$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{\sqrt{1 - 2(r'/r) \cos \theta + r'^2/r^2}} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho(\vec{r}') \left(1 + \frac{r'}{r} \cos \theta - \frac{r'^2}{2r^2} + \frac{3r'^2}{2r^2} \cos^2 \theta + \dots \right) dV' = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\int \rho(\vec{r}')dV' + \int \frac{r'}{r} \rho(\vec{r}')dV' + \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{r'^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \rho(\vec{r}')dV' + \dots \right) = \\ &=: \frac{K_0}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{K_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{K_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2 Das Dipolmoment

Der Koeffizient K_0 ist die Gesamtladung, die nach Annahme verschwindet. Nächstwichtiger ist damit K_1 . Mit Hilfe der Beziehung $\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' \cos \theta$ läßt sich dieser Koeffizient in ein Skalarprodukt umschreiben, es gilt

$$\varphi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int \rho(\vec{r}') rr' \cos \theta dV' = \frac{\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV' = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \tag{3.5}$$

Der Vektor

$$\vec{p} := \int \rho(\vec{r}) \vec{r} dV \tag{3.6}$$

wird als *elektrisches Dipolmoment* bezeichnet. Es wird ideal realisiert durch zwei gleich große, entgegengesetzte Punktladungen im Abstand \vec{s} . Diese Punktladungen lassen sich beschreiben durch die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{s}) - q\delta(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{s}). \tag{3.7}$$

Wir berechnen dafür

$$\vec{p} = q \int \delta(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{s}) \vec{r} dV - q \int \delta(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{s}) \vec{r} dV = q\frac{1}{2}\vec{s} - q\frac{1}{2}(-\vec{s}) = q\vec{s}. \tag{3.8}$$

3.2.1 Feld eines elektrischen Dipols

Nun wollen wir das elektrische Feld bestimmen, das ein Dipol erzeugt. Es ergibt sich aus dem Gradienten des Potentials, und diesen können wir zunächst ganz allgemein bestimmen,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = \frac{3\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r}) - r^2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5}. \tag{3.9}$$

Für einen idealen Dipol $\vec{p} = q\vec{s}$ können wir noch das elektrische Feld in Richtung des Dipols und senkrecht dazu bestimmen. Dazu legen wir den Dipol entlang der z -Achse symmetrisch zum Ursprung und berechnen

$$\vec{E}(0, 0, z) = \frac{2q\vec{s}}{4\pi\epsilon_0 z^3} \quad \text{und} \tag{3.10}$$

$$\vec{E}(x, y, 0) = \frac{-q\vec{s}}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}}. \tag{3.11}$$

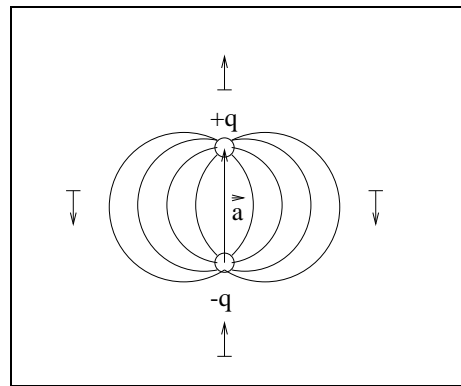


Abb. 3.1 Feld eines elektrischen Dipols

Das Feld in der Äquatorialebene ist also in gleicher Entfernung halb so groß wie dasjenige entlang des Dipols und weist in die entgegengesetzte Richtung.

3.2.2 Kraft auf einen elektrischen Dipol

Ist der Dipol in ein elektrisches Feld gesetzt, so wirkt auf ihn eine Kraft. In einem homogenen elektrischen Feld ist die Kraft auf positive und negative Ladung des Dipols entgegengesetzt gleich groß. Daher wird der Dipol nicht von der Stelle bewegt, sondern gedreht. Es wirkt ein *Drehmoment*

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{1}{2} \vec{s} \times q \vec{E} + \frac{1}{2} (-\vec{s}) \times q \vec{E} = q \vec{s} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (3.12)$$

Liegt der Dipol parallel zum elektrischen Feld, so verschwindet das Drehmoment. Das elektrische Feld sorgt bei vorhandener Dämpfung also für eine *Ausrichtung* des Dipols entgegengesetzt zum Feld. Besaß der Dipol zu Beginn einen Winkel θ_0 zu diesem, so ist die *Einstellenergie* gegeben als

$$W = \int_0^{\theta_0} N d\theta = \int_0^{\theta_0} pE \sin \theta d\theta = pE(1 - \cos \theta_0). \quad (3.13)$$

Bei Drehung um 180° wird diese am größten, $W = 2pE$. Ist das elektrische Feld dagegen inhomogen, so können noch zusätzliche Kräfte wirksam werden. Die Kraft auf einen idealen Dipol bei \vec{r} ergibt sich durch Entwicklung nach der Ausdehnung des Dipols. Dazu verwenden wir die verallgemeinerte Fourierreihe in drei Dimensionen für eine Funktion $f(\vec{x})$, wobei diese Funktion auch ein Vektorfeld sein kann. Es gilt für diese Funktion

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \Delta\vec{x}) &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = \\ &= f(x, y, z) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x,y,z)} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x,y,z)} + \Delta z \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(x,y,z)} + \dots \\ &= f(\vec{x}) + (\Delta\vec{x} \cdot \nabla) f(\vec{x}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= q\vec{E}(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{s}) + q\vec{E}(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{s}) = \\ &\cong q\vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{2}q(\vec{s} \cdot \nabla)\vec{E}(\vec{r}) - q\vec{E}(\vec{r}) - \frac{1}{2}q(-\vec{s} \cdot \nabla)\vec{E}(\vec{r}) = \\ &= q(\vec{s} \cdot \nabla)\vec{E}(\vec{r}) = (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}(\vec{r}). \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2.3 Das elektrische Quadrupolmoment

Der Koeffizient K_2 läßt sich nicht mehr als Skalarprodukt zweier Vektoren, vielmehr als ein Produkt eines Tensors mit zwei Radialvektoren beschreiben. Dieser Tensor wird als *Quadrupolmoment* bezeichnet. Uns soll hier vor allem der ideale Quadrupol interessieren. Er besteht aus einem Quadrat von betragsgleichen Ladungen, die sich von Ecke zu Ecke in ihrem Vorzeichen abwechseln. Daraus läßt sich schon erkennen, daß ein nächster Term ein *Sextupolmoment* enthält, dessen Idealform in einem gleichseitiges Sechseck realisiert ist, usw.

Zur Berechnung eines idealen Quadrupolmoments legen wir positive Ladungen in die Punkte $(\pm a/2, 0)$ und negative in die Punkte $(0, \pm a/2)$ der Ebene. Dann ergibt sich mit

$$\begin{aligned} \rho(x, y) = & q\delta(x - a/2)\delta(y) + & (3.16) \\ & - q\delta(x)\delta(y - a/2) + \\ & + q\delta(x + a/2)\delta(y) + \\ & - q\delta(x)\delta(y + a/2) \end{aligned}$$

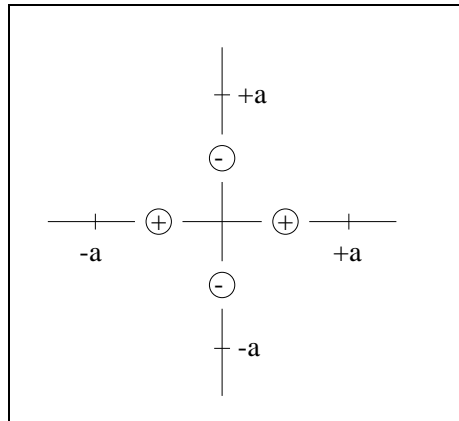


Abb. 3.2 Ein idealer Quadrupol

der Koeffizient zu

$$\begin{aligned} K_2 = & \frac{qa^2}{8r^2} \left(3 \cos^2 \theta - 1 - 3 \cos^2 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + 1 + \right. \\ & \left. + 3 \cos^2 (\theta - \pi) - 1 - 3 \cos^2 \left(\theta - \frac{3\pi}{2} \right) + 1 \right) = \\ = & \frac{3qa^2}{4r^2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \frac{3qa^2 (x^2 - y^2)}{4(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

für einen Beobachter in der Ebene am Punkt (x, y) . In Tensorschreibweise ist das Quadrupolmoment

$$Q = \int \rho(\vec{r}) \left(\frac{3}{2} \vec{r} \otimes \vec{r} - \frac{1}{2} r^2 \right) dV. \quad (3.18)$$

3.3 Das elektrische Feld vieler Dipole

Zusammengenommen erzeugen Dipole, die von einem elektrischen Feld ausgerichtet oder erzeugt werden, ein neues Potential und damit ein elektrisches Feld, das dem Ausgangsfeld entgegengerichtet ist.

3.3.1 Feld einer homogenen Dipolschicht

Wir betrachten die Dipole in einer Materieschicht zwischen zwei Kondensatorplatten. Sie werden ausgerichtet durch das homogene Feld dieser Platten. Gehen wir zu einer kontinuierlichen Verteilung der Dipole ein, so läßt sich das Dipolmoment eines Volumenelements dV durch die *Dipolmomentendichte* oder *Polarisation* \vec{P} beschreiben, $d\vec{p} = \vec{P} dV$. Zur Berechnung teilen wir den Isolator zwischen den Kondensatorplatten in schmale Säulen des Querschnitts da parallel zur Polarisation ein. Diese Richtung bezeichnen wir als z -Achse und legen den Beobachtungspunkt in den Ursprung des gewählten Koordinatensystems. Dann gilt für jede solche Säule

$$\begin{aligned} \varphi_D = & \int_{z_0}^{z_1} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \int_{z_0}^{z_1} \frac{z P da dz}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} = \\ = & \frac{P da}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z_1^2}} - \frac{P da}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z_0^2}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Wir erhalten hier das Feld zweier Punktladungen der Größe P da. Die Superposition der Säulen liefert damit nichts anderes als das Feld einer Doppelschicht mit Flächenladungsdichte $\sigma = P$. Nach außen hin wirkt die polarisierte Schicht also wie ein Plattenkondensator. Damit ist aber auch das mittlere makroskopische Feld im Innern das eines Kondensators, es gilt

$$\vec{E}_D = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad \text{und damit} \quad \vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_D = \vec{E}_{\text{ext}} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}. \quad (3.20)$$

Die induzierten Ladungen sind im Gegensatz zu den *freien Ladungen* auf den Kondensatorplatten *gebundene Ladungen*, da sie sich nicht aus dem Dielektrikum lösen können.

3.3.2 Feld einer homogen polarisierten Kugel

Wir betrachten eine homogen polarisierte Kugel des Radius r_0 . Sie besitzt nach außen insgesamt das Dipolmoment

$$\vec{p} = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \vec{P}. \quad (3.21)$$

Damit ergibt sich ein Außenfeld von

$$\varphi_D(\vec{r}) = \frac{r_0^3}{3\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad |\vec{r}| > r_0. \quad (3.22)$$

Anders im Innern der Kugel. Stellen wir uns die Polarisation einfach als eine Verschiebung zweier geladener Kugeln gegeneinander vor, so gilt für jede dieser Kugeln der Gaußsche Satz, d.h. es wirkt jeweils nur der Anteil der Ladung, der innerhalb der Kugelschale liegt, auf welcher der Beobachtungspunkt sitzt. Dasselbe gilt dann auch für die Polarisation. Zum Potential trägt also nur die Polarisation der verkleinerten Kugel bei, die nun den Wert

$$\vec{p} = \frac{4\pi}{3} r^3 \vec{P} \quad (3.23)$$

besitzt, es ergibt sich damit

$$\varphi_D(\vec{r}) = \frac{1}{3\epsilon_0} (\vec{P} \cdot \vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}. \quad (3.24)$$

Das Potential stimmt auf der Oberfläche der Kugel überein. Das ist eine Konsequenz der Laplacegleichung. Jedoch sieht das elektrische Feld außen sehr viel anders als das homogene Feld im Innern aus. Berechnen wie es mit Hilfe von Gleichung (3.9) für oberflächennahe Punkte auf der Polachse und in der Äquatorialebene, so erhalten wir bis auf den Volumenfaktor dieselben Ergebnisse wie in Gleichung (3.10) und (3.11):

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{2}{3\epsilon_0} \vec{P} \quad \text{für } z \rightarrow r_0, z > r_0 \quad (3.25)$$

$$\vec{E}(x,y,0) = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \quad \text{für } x^2 + y^2 \rightarrow r_0^2, x^2 + y^2 > r_0^2 \quad (3.26)$$

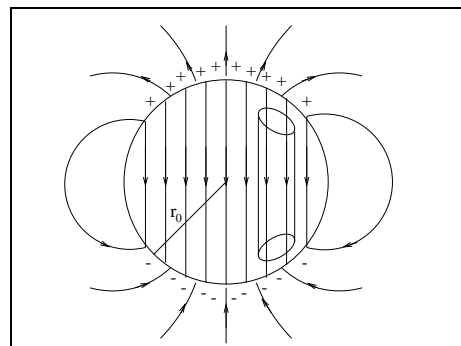


Abb. 3.3 Homogen polarisierte Kugel

3.4 Der Plattenkondensator mit Materie

Wir haben erkannt, daß eine dielektrische Schicht ein dem außen angelegten elektrischen Feld entgegengesetztes Feld aufbaut. Was für makroskopische Konsequenzen hat dies nun? Berechnen wir dazu das effektive Gesamtfeld zwischen den Kondensatorplatten und die sich daraus ergebenden meßbaren Größen.

3.4.1 Die elektrische Suszeptibilität

Es ist nicht das ursprünglich vorhandene elektrische Feld \vec{E}_0 , sondern das nach Einfügen des Dielektrikums entstandene Feld \vec{E} , das mit der Polarisierbarkeit \vec{P} in Beziehung gesetzt wird,

$$\vec{P} = \chi_E \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (3.27)$$

Die Proportionalitätskonstante χ_E heißt (*makroskopische*) *elektrische Suszeptibilität*. Setzen wir dies in Gleichung (3.20) ein, so erhalten wir

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = \vec{E}_0 - \chi_E \vec{E} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E}_0 = (1 + \chi_E) \vec{E} =: \varepsilon \vec{E}. \quad (3.28)$$

Das Feld ohne Dielektrikum ist also um einen Faktor ε höher, der als *Dielektrizität* bezeichnet wird, eine materialabhängige Größe, von der bereits zu Beginn des Kapitels die Rede war und von der verschiedene Werte angegeben wurden. Umgekehrt gilt natürlich, daß das elektrische Feld des leeren Kondensators durch das Dielektrikum um den Kehrwert des Dielektrizitätswertes abgeschwächt wurde. Das hat Konsequenzen für die Kapazität des Kondensators. Zunächst ergibt sich für die elektrische Spannung

$$U = Ed = \frac{E_0}{\varepsilon} d = \frac{U_0}{\varepsilon}, \quad (3.29)$$

diese nimmt also ab. Da sich jedoch an der Ladung auf den Kondensatorplatten nichts ändert, führt diese Spannungsabnahme zu einer Erhöhung der Kapazität,

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon Q}{U_0} = \varepsilon C_0. \quad (3.30)$$

Durch Wahl geeigneter Dielektrika läßt sich also die Kapazität eines Kondensators beträchtlich erhöhen.

3.4.2 Die Clausius-Masotti-Gleichung

Wie schon bemerkt, handelt es sich bei χ_E um die *makroskopische* Suszeptibilität. Sie berechnet sich mit Hilfe eines makroskopisch gemittelten Feldes \vec{E}_{eff} . Doch wie sieht es mikroskopisch aus? Wir bezeichnen mit \vec{E}_{lok} das lokale Feld am Ort des induzierten Dipols, um den wir in Gedanken eine Kugel legen. Dann wirken auf den Dipol einmal das effektive elektrische Feld seiner Umgebung ohne dasjenige der Kugel und das exakte Feld der Kugel selbst,

$$E_{\text{lok}} = E_{\text{eff}} - E_{\text{eff}}(\text{Kugel}) + E(\text{Kugel}). \quad (3.31)$$

Nehmen wir für die Umgebung eine kubische Symmetrie an, so verschwindet letzteres Feld. Jedoch wissen wir aus den Betrachtungen zur polarisierten Vollkugel, Gleichung (3.24), daß das effektive elektrische Feld der homogen polarisierten Kugel den Werte $E_{\text{eff}}(\text{Kugel}) = -P/3\varepsilon_0$ besitzt, wobei die Polarisation wiederum vom effektiven elektrischen Feld der Umgebung abhängt. Damit ist

$$E_{\text{lok}} = E_{\text{eff}} + \frac{P}{3\varepsilon_0} = \left(1 + \frac{1}{3}\chi_E\right)E_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{\varepsilon - 1}{3}\right)E_{\text{eff}} = \frac{2 + \varepsilon}{3}E_{\text{eff}} \quad (3.32)$$

Schließlich läßt sich ein Zusammenhang zwischen der mikroskopischen Polarisierbarkeit α , die sich in $\vec{p} = \alpha\vec{E}_{\text{lok}}$ wiederfindet, und der makroskopischen Suszeptibilität herstellen. Ist N die Teilchendichte, so gilt einerseits

$$\vec{P} = N\alpha\vec{E}_{\text{lok}} = N\alpha\frac{\varepsilon + 2}{3}\vec{E}_{\text{eff}}, \quad \text{andererseits} \quad \vec{P} = \vec{P} = \chi_E\varepsilon_0\vec{E}_{\text{eff}}, \quad (3.33)$$

Also schließlich

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}. \quad (3.34)$$

Diese Gleichung ist die *Clausius-Masotti-Gleichung*.

3.4.3 Die elektrische Verschiebungsdichte

Nach dieser Reise in den Mikrokosmos kehren wir auf makroskopische Bereiche zurück. Das Feld \vec{E}_0 ohne Dielektrikum hat auch eine physikalische Bedeutung, wenn das Dielektrikum dazwischentritt. Es ist an die *freien Ladungen* gebunden, die im Gegensatz zu den gebundenen Ladungen durch die Verschiebung der Leitungselektronen gebildet werden. Mit der gleichen Einheit wie die Flächenladungsdichte definieren wir somit die *elektrische Verschiebungsdichte*

$$\vec{D} := \varepsilon_0\vec{E}_0 = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}. \quad (3.35)$$

Mit dieser Größe läßt sich Gleichung (3.20) auch schreiben als

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\vec{D} - \vec{P}), \quad (3.36)$$

was die gegenseitige Abhängigkeit noch klarer zum Ausdruck bringt. Es gilt ferner das Gaußsche Gesetz in einer neuen Form,

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{frei}}. \quad (3.37)$$

3.4.4 Energiebetrachtungen

Bisher haben wir ohne Materie die Energie des elektrischen Feldes als

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \vec{E}^2 dV \tag{3.38}$$

geschrieben. Wovon hängt sie nun ab, da Materie vorhanden ist? Die Energie ist zunächst einmal

$$W = \frac{1}{2} \int \int \frac{\rho_{\text{tot}}(\vec{r}) \rho_{\text{tot}}(\vec{r}')}{4\pi \epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV. \tag{3.39}$$

Dies ergibt sich aus Gleichung (1.69) bei explizit angegebenem Potential $\varphi(\vec{r})$. Beide Ladungsdichten sind totale Dichten, die sowohl freie Ladungsträger wie auch induzierte Ladungen enthalten. Eine Änderung des elektrischen Feldes und damit eine Änderung der Energie dieses Feldes ist aber nur durch die Veränderung der Ladungsverteilung freier Ladungsträger möglich. Daher ist

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2} \int \int \frac{\delta \rho_{\text{frei}}(\vec{r}) \rho_{\text{tot}}(\vec{r}')}{4\pi \epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV + \frac{1}{2} \int \int \frac{\rho_{\text{tot}}(\vec{r}) \delta \rho_{\text{frei}}(\vec{r}')}{4\pi \epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV = \\ &= \int \int \frac{\delta \rho_{\text{frei}}(\vec{r}) \rho_{\text{tot}}(\vec{r}')}{4\pi \epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV = \int \delta \rho_{\text{frei}}(\vec{r}) \varphi_{\text{tot}}(\vec{r}) dV = \\ &= \int \text{div}(\delta \vec{D}(\vec{r})) \varphi_{\text{tot}}(\vec{r}) dV = \int \delta \vec{D}(\vec{r}) \cdot \text{grad} \varphi_{\text{tot}}(\vec{r}) dV = \\ &= \int \delta \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV \end{aligned} \tag{3.40}$$

und damit (wegen $D \sim E$)

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV. \tag{3.41}$$

3.5 Ein abschließendes Experiment

Zwischen die Metallplatten eines Kondensators wird eine Platte aus Acrylglas gesenkt. Zu beobachten ist bei festgehaltener Spannung eine Erhöhung der Ladungsmenge, die nach Abklemmen der Spannungsquelle an einem Elektrometer gemessen werden kann, bei vorgegebener Ladung auf den Platten jedoch eine Abnahme der Spannung. Beides deutet auf eine Zunahme der Kapazität des Kondensators hin.

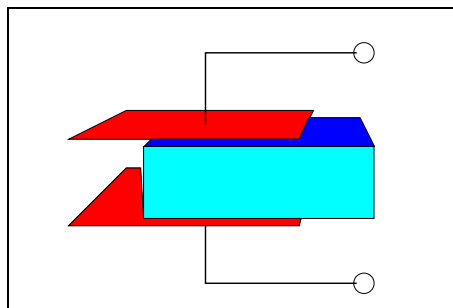


Abb. 3.4 Messung der Kapazität mit Materie

4. Elektrische Ströme

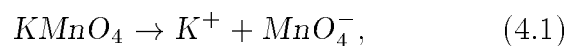
Bisher haben wir ruhende elektrische Ladungen betrachtet, also die *Statik* elektrischer Vorgänge. Ladungen sind aber in vielen Fällen in Bewegung:

1. Im Vakuum einer Kathodenstrahlröhre, welche die Grundlage des Fernsehbildschirms bildet, können Elektronen aus einer Glühkathode austreten und durch den freien Raum fliegen, bis sie auf die Anode oder aber an ihr vorbei auf den Bildschirm fallen.
2. Bei der Gasentladung entstehende Ionen bewegen sich im elektrischen Feld.
3. Ionen in einer Flüssigkeit, beispielsweise in einer Salzlösung, werden durch eine elektrische Spannung zu Wanderungen angeregt. Dazu folgen gleich einige Experimente.
4. Elektronen und Ionen wandern in Festkörpern. Dies können *Leiter* wie die verschiedenen Metalle oder *Halbleiter* wie Silicium (Si), Germanium (Ge) oder Galliumarsenid (GaAs) sein.
5. Elektronenpaare, sogenannte Cooper-Paare, sind für die Supraleitung von entscheidender Bedeutung.

4.1 Experimente zur Ionenwanderung

4.1.1 Dissoziation

Ein U-förmiges Glasrohr ist an jedem Ende mit einer Elektrode versehen. Im Glasrohr befindet sich eine Kaliumpermanganatlösung ($KMnO_4$), die von Wasser bedeckt ist. Wird eine Spannung an den Elektroden angelegt, so erkennt man eine deutliche violette Färbung am Ende der Anode. Das Permanganat ist dissoziiert,



und die negativen Manganationen sind zur positiven Anode gewandert.

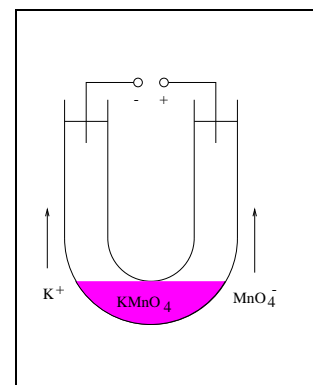


Abb. 4.1 Wanderung von Permanganat

4.1.2 Metallabscheidung

Ein Kolben ist mit einer Bleinitratlösung gefüllt, diesmal ist die Kathode eine große Platte, während die Anode nur aus einer kleinen Kugel besteht. Diese Anordnung kann mit einem Projektor an die Wand projiziert werden. Zu erkennen ist nach einiger Zeit die Ausbildung eines „Bleibaumes“, also feinen Bleifäden, die in etwa die Richtung der elektrischen Feldlinien wiedergeben, die zwischen Anode und Kathode verlaufen.

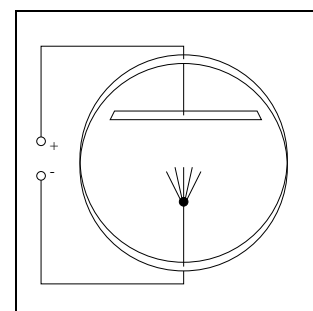


Abb. 4.2 Bleibaum

4.1.3 Ionenreibung

Daß Ionen aus eine Masse besitzen und damit bei ihrem Auftreffen auf die Elektrode einen Impuls an diese abgeben, können wir an einer recht einfallsreichen Apparatur erkennen. In ein Becken ist eine Lösung von Eisen(II)sulfat gefüllt. Ein Stab in der Mitte des Beckens ist die Kathode, die Anode besteht aus einem Ring, der um diese Achse frei beweglich aufgehängt ist. Seine Bewegung wird durch ein aufgesetztes kleines Schiffchen angezeigt. Wird nun eine Spannung angelegt und zusätzlich ein Magnetfeld parallel zum Kathodendraht geschaltet, so dreht sich das Schiffchen.

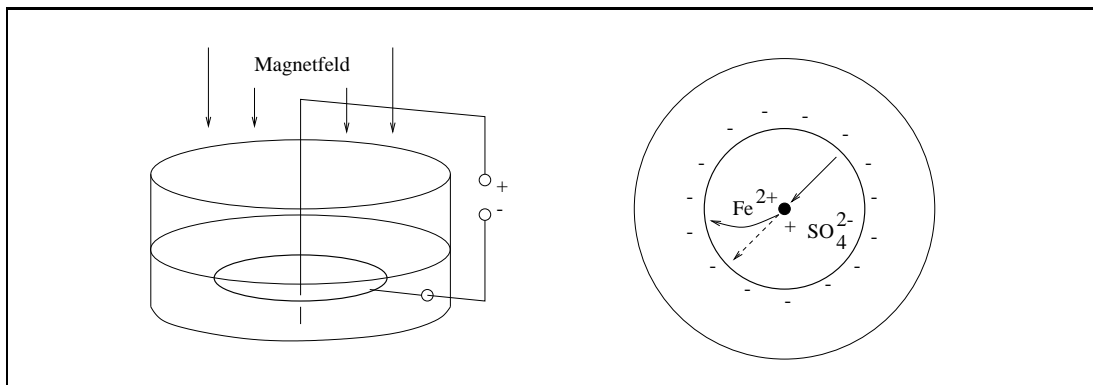


Abb. 4.3 Ionenreibung

Dies ist mit der Lorentzkraft zu erklären, auf die wir erst in einem späteren Kapitel eingehen werden. Sie wird vom Magnetfeld auf bewegte Ladungen ausgeübt und sorgt dafür, daß diese von der geraden Richtung auf eine gebogene Bahn abgelenkt werden. Sie läßt also die Eisen(II)ionen, die in der wässrigen Lösung vorhanden sind, nicht senkrecht, sondern etwas schräg auf den Anodenring treffen, und diese geben dort ihren Impuls an den Ring ab, der sich zu drehen beginnt.

4.2 Die elektrische Stromstärke

Die Einheit der *elektrischen Stromstärke* I ist nach dem französischen Physiker André Marie Ampère (1775–1836) benannt. Wird in einer Sekunde von den Ladungsträgern die Ladung von einem Coulomb transportiert, so hat man einen elektrischen Strom von einem Ampère vorliegen. Oder, in Formeln ausgedrückt:

$$I = \frac{Q}{\Delta t} \quad 1\text{A} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}}. \quad (4.2)$$

Die *konventionelle Stromrichtung* läuft zum positiven zum negativen Pol einer angelegten Stromquelle. Chemisch meßbar ist das Ampère durch die Abscheidung von Metallionen in einer Metallschicht an der Kathode. So lautet eine gängigere Definition:

1 Ampère [A] ist der Strom, der in 1 Sekunde 1.118mg Silber (Ag) aus einer Silbernitratlösung (AgNO₃) abscheidet.

Schließlich entspricht 1A dem Transport von $6.2 \cdot 10^{18}$ Elektronen pro Sekunde entgegen der konventionellen Stromrichtung. Doch wie bewegen sich diese Elektronen? Einfache Beispiele bieten schon eine recht gute Übereinstimmung mit der Realität.

4.2.1 Elektrische Stromdichte und Kontinuitätsgleichung

Das einfachste mögliche Modell geht von gleichförmig bewegten gleichgeladenen Teilchen aus. Die Zahl der Teilchen, die im Zeitintervall Δt eine gegebene Fläche \vec{a} durchströmen, ist proportional zu dem Volumen $\Delta V = \vec{a} \cdot \vec{v} \Delta t$, wobei \vec{v} die Geschwindigkeit der Teilchen ist. Als Proportionalitätskonstante dient die Teilchendichte n . Trägt jedes Teilchen eine Ladung q , so verlagert der Strom der Teilchen eine Ladung

$$\Delta Q = qn\Delta V = qn\vec{a} \cdot \vec{v}\Delta t \quad (4.3)$$

aus dem Bereich vor der Fläche in den Bereich dahinter. Die Stromstärke, also die Ladungsverschiebung pro Zeiteinheit, ist somit gegeben als $I = qn\vec{a} \cdot \vec{v}$.

Nun tragen die Teilchen weder gleiche Ladung noch bewegen sie sich mit derselben Geschwindigkeit. Dennoch können wir sie zu solchen Klassen von Teilchen zusammenfassen, die jede einen Beitrag I_k zur Gesamtstromstärke liefern. Insgesamt folgt also

$$I = \sum_k I_k = \vec{a} \cdot \sum_k q_k n_k \vec{v}_k =: \vec{a} \cdot \vec{j} \quad (4.4)$$

Dabei haben wir für die Summe abkürzend \vec{j} geschrieben, und gleich eine neue Größe eingeführt, die *elektrische Stromdichte*. Die Fläche \vec{a} , die als „Meßapparat“ außen vor bleibt, ist bislang als ebene Fläche betrachtet worden. Für die allgemeinere Situation müssen wir über die verschiedenen Flächenelemente integrieren,

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{a}. \quad (4.5)$$

Eine Besonderheit bietet die geschlossene Fläche. Anschaulich klar ist, daß ein nichtverschwindender Gesamtstrom aus dem Volumen durch die Fläche eine Verringerung der Ladung im Volumen zur Folge hat. Das geschlossene Flächenintegral kann dabei mit Hilfe des Gaußschen Satzes gleichfalls in ein Volumenintegral verwandelt werden:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \int \rho dV &= -\frac{d}{dt} Q = I = \oint \vec{j} \cdot d\vec{a} = \int \operatorname{div} \vec{a} dV \\ &\Leftrightarrow \int \left(\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Da dies für ein beliebiges Volumen gilt, muß der Integrand verschwinden, und dies liefert die *Kontinuitätsgleichung*

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4.7)$$

Rechentchnische Beachtung verlangt die Verwandlung der totalen Zeitableitung in eine partielle. Diese Ersetzung ist notwendig, da der Integrand im Gegensatz zum Integral eine Funktion des Ortes ist.

4.2.2 Beweglichkeit und Leitfähigkeit

Warum aber bewegen sich die Ladungsträger in einem metallischen Leiter gleichmäßig, wenn von außen eine Spannung angelegt wird? Naiv würde man doch erwarten, daß sie unter der Wirkung dieser elektromotorischen Kraft eine gleichförmige Beschleunigung erführen. Grund für die im Mittel gleichförmige Bewegung ist letzten Endes das Metall selbst, das nicht als eine ideale Flüssigkeit oder gar als leerer Raum betrachtet werden darf, sondern für die Elektronen Hindernisse aufbaut. Eine Analogie findet sich hier zum berühmten Kugelviskosimeter im Öltröpfchenversuch von Millikan, wo die Beschleunigung durch eine Reibungskraft gebremst wird, die proportional zur Geschwindigkeit ist. Wie sieht die Reibung nun in unserem Fall aus?

Wir betrachten ein geladenes Teilchen, das mit einer Geschwindigkeit \vec{v} startet. Während der Zeit t , in der es sich frei im Metall bewegen kann, wird es vom elektrischen Feld \vec{E} beschleunigt. Es erhält während dieser Zeit den Impuls

$$m\vec{v}' = m\vec{v} + q\vec{E}t. \quad (4.8)$$

Nach dieser Zeit wird das Teilchen erneut gestreut. Die Geschwindigkeit des Teilchens direkt nach dem Stoß ist im Mittel *isotrop*, es kann in jede Richtung gestreut werden. Mitteln wir über gleichgeladene und gleichschwere Ladungsträger, so fällt folglich die Mittlung der Geschwindigkeiten direkt nach dem Stoß heraus, $\langle \vec{v} \rangle = 0$, nicht aber die Mittlung der Geschwindigkeiten \vec{v}' , hier ergibt sich vielmehr eine *Driftgeschwindigkeit*

$$\vec{v}_D = \langle \vec{v}' \rangle = \langle \vec{v} \rangle + \frac{q}{m} \langle t \rangle \vec{E} = \frac{q}{m} \langle t \rangle \vec{E} =: \beta \vec{E}. \quad (4.9)$$

Wir haben dabei die *Beweglichkeit* β eingeführt. $\langle t \rangle$ ist die mittlere freie Laufzeit, die über $L = |\vec{v}| \langle t \rangle$ mit der mittleren freien Weglänge L in Zusammenhang steht, wobei allerdings der Betrag der Geschwindigkeit des einzelnen Teilchens eingeht. Wir erkennen, daß die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger tatsächlich proportional zum angelegten elektrischen Feld ist. Nun kann erneut die Stromdichte ausgerechnet werden. Um einfacher rechnen zu können, nehmen wir an, daß sich der Strom aus der Bewegung gleich vieler, einfach geladener positiver und negativer Ladungsträger zusammensetzt. Es ergeben sich dann die Driftgeschwindigkeiten

$$\vec{v}_+ = \beta_+ \vec{E} = \frac{e \langle t \rangle_+}{m_+} \vec{E} \quad \text{und} \quad \vec{v}_- = \beta_- \vec{E} = -\frac{e \langle t \rangle_-}{m_-} \vec{E} \quad (4.10)$$

und damit

$$\vec{j} = ne\vec{v}_+ - ne\vec{v}_- = ne(\beta_+ - \beta_-)\vec{E} = ne^2 \left(\frac{\langle t \rangle_+}{m_+} + \frac{\langle t \rangle_-}{m_-} \right) \vec{E} =: \sigma \vec{E}. \quad (4.11)$$

Die *Leitfähigkeit* σ ist nun eine makroskopisch meßbare Größe, während die vorhergehenden es nicht waren. Vernachlässigen wir den Effekt der positiven Ladungsträger und betrachten nur die Elektronen als frei beweglich, so ergibt sich

die einfache Beziehung $\sigma = -ne\beta$ zwischen Beweglichkeit und Leitfähigkeit. Um einen Sinn für die makroskopisch nicht meßbaren Größen zu erhalten, wollen wir sie für ein Beispiel abschätzen.

Für ein Metall mit einer Teilchendichte $n = 10^{28} \text{ m}^{-3}$ und einer Leitfähigkeit $\sigma = 10^7 \text{ C}^2 \text{ s} / \text{kg m}^3$, die von Elektronen der Masse $m = 10^{-30} \text{ kg}$ und Ladung $-e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ getragen wird, ergibt sich eine mittlere freie Laufzeit von $\langle t \rangle = 4 \cdot 10^{-14} \text{ s}$. Dies kann mit einem mikroskopischen Gittermodell des Metalls verglichen werden. Aus der Thermodynamik wissen wir, daß die kinetische Energie eines in drei Raumrichtungen beweglichen Teilchens von jeder dieser Freiheitsgrade einen Beitrag $k_B T/2$ ($2 \cdot 10^{-21} \text{ J}$ für eine Temperatur von $T = 300 \text{ K}$) erhält. Die Geschwindigkeit des Elektrons ist also $v = 10^5 \text{ m/s}$, und setzen wir als mittlere freie Weglänge einfach den Gitterabstand $L = 5 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ an, so erhalten wir als mittlere freie Laufzeit einen Wert von $\langle t \rangle = 5 \cdot 10^{-14} \text{ s}$. Die Abschätzung funktioniert also recht gut.

Schließlich schätzen wir für einen angelegten Strom von 1 A und einer Querschnittsfläche $a = 0.1 \text{ mm}^2$ des Drahtes eine Stromdichte $j = 10^7 \text{ C/m}^2 \text{ s}$ und damit eine Driftgeschwindigkeit $v_D = 6.3 \text{ mm/s}$. Hier ist leicht zu erkennen: Die Driftgeschwindigkeit ist um Größenordnungen kleiner als jene Geschwindigkeit, die in der thermischen Bewegung der Teilchen eine Rolle spielt.

4.3 Ohmsches Gesetz und elektrischer Widerstand

Alle diese Modellvorstellungen konnten wir nur entwickeln, weil die Grundlagen dafür bereits recht früh gelegt und die Zusammenhänge nachgewiesen waren. Der deutsche Physiker Georg Simon Ohm (1787–1854) stellte fest:

In metallischen Leitern ist bei konstanter Temperatur das Verhältnis der Spannung, also der Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten, und dem zwischen diesen Punkten fließenden Strom eine Konstante.

In Formeln geschrieben lautet das *Ohmsche Gesetz*

$$U = R I, \quad [R] = \frac{V}{A} = \frac{\text{kg m}}{\text{C}^2 \text{ s}} =: \Omega \text{ (Ohm)} \quad (4.12)$$

R ist der *elektrische Widerstand*. Wir können diesen Widerstand für einfache Beispiele berechnen und damit mit der Leitfähigkeit in Beziehung setzen.

4.3.1 Beispiel: Metalldraht

Gegeben sei ein Metalldraht der Länge l und der Querschnittsfläche a . Dann ist der elektrische Strom über $I = j a$ und die Spannung über $U = E l$ mit Stromdichte bzw. elektrischem Feld verbunden. Für den Widerstand berechnen wir

$$R = \frac{U}{I} = \frac{E l}{j a} = \frac{E l}{\sigma E a} = \frac{l}{\sigma a} =: \frac{l}{a} \rho_W. \quad (4.13)$$

Während Leitfähigkeit σ und ihr Kehrwert, der *spezifische Widerstand* ρ_W Materialgrößen sind, hängt der Widerstand also von den Ausmaßen des Leiters

ab, steigt mit wachsender Länge und kleinerem Querschnitt. Sind also die Materialgrößen gegeben, so läßt sich der Widerstand eines gegebenen Drahtes bestimmen. Dazu eine Liste der Leitfähigkeiten verschiedener Materialien:

Material:	Leitfähigkeit σ
Silber	$6.25 \cdot 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$
Kupfer	$5.9 \cdot 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$
Aluminium	$3.45 \cdot 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$
Eisen	$1.17 \cdot 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$
Wismut	$8.5 \cdot 10^5 \Omega^{-1} m^{-1}$
Glas	$10^{-8} \Omega^{-1} m^{-1}$
Dielektrikum	$10^{-16} \Omega^{-1} m^{-1}$

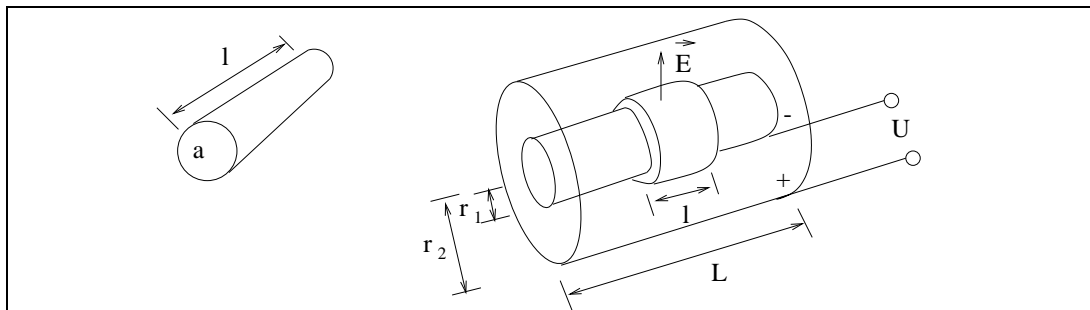


Abb. 4.4 Metalldraht und Metallrohr

4.3.2 Beispiel: Metallrohr

In diesem Beispiel werde die Spannung zwischen Innen- und Außenfläche des Rohres angelegt. Der Konvention halber sei innen der positive, außen der negative Pol. Das axialsymmetrische elektrische Feld zwischen diesen beiden Polen besitzt ein $1/r$ -Verhalten, und die Proportionalitätskonstante k wird durch die Randbedingungen festgelegt. Sind r_1 und r_2 die Radien von Innen- und Außenzylinder, so berechnet sich

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E dr = k \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = k \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \Rightarrow E = \frac{U}{r} \left(\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \right)^{-1} \quad (4.14)$$

Das elektrische Feld in einem Abstand r zur Achse verursacht gemäß der Beziehung $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ einen elektrischen Strom durch die Fläche $2\pi r L$, es ist also

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{a} = \vec{j} \cdot 2\pi r L = 2\pi \sigma r L E = 2\pi \sigma L U \left(\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \right)^{-1}, \quad (4.15)$$

der Widerstand ist folglich

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi \sigma L} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right). \quad (4.16)$$

4.4 Die Kirchhoffschen Gesetze

Wir können nach diesen anfänglichen Überlegungen zu den mikroskopischen Vorgängen in Metallen den Widerstand fortan als ein Schaltelement betrachten, das Spannung und Widerstand gemäß dem Ohmschen Gesetz miteinander verknüpft. Widerstände lassen sich zusammen mit anderen Schaltelementen wie Spannungs- oder Stromquellen und weiteren (beispielsweise Kondensatoren, vgl. Abschnitt 4.6) zu Netzwerken zusammenschalten, die wie ein Fischernetz Knoten und Maschen besitzen. Der deutsche Physiker Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887) entwickelte für solche Netzwerke unter der Annahme eines stationären, also zeitunabhängigen Stromes die folgenden Gesetze:

1. *Knotenregel: Die Summe der in einen Knoten einlaufenden Ströme ist gleich der Summe der aus dem Knoten auslaufenden Ströme*
2. *Maschenregel: Die Summe der Spannungen oder Potentialdifferenzen entlang des Umlaufs um eine Masche verschwindet*

(Kirchhoffsche Gesetze)

Diese Gesetze haben zunächst einmal Konsequenzen für *Serien- und Parallelschaltungen von Widerständen*. Für die Serienschaltung ergibt sich aus der Knotenregel, daß jeder Widerstand von derselben Stromstärke durchflossen wird, die Maschenregel liefert die Aussage, daß die angelegte Spannung gleich der Summe der an den Widerständen abfallenden Spannungen ist. So erhalten wir

$$U = \sum_i U_i = \sum_i R_i I = I \sum_i R_i \quad \Rightarrow \quad R = \sum_i R_i, \quad (4.17)$$

der Ersatzwiderstand R ist also die Summe der Einzelwiderstände. Für die Parallelschaltung liefert die Maschenregel, daß die Spannung, die an jedem Widerstand anfällt, gleich der angelegten Spannung ist, während die Knotenregel die Teilung des Stromes in die Einzelströme ergibt. Somit erhalten wir in diesem Fall

$$I = \sum_i I_i = \sum_i \frac{U}{R_i} = U \sum_i \frac{1}{R_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}. \quad (4.18)$$

Hier addieren sich die Kehrwerte der Widerstände zum Kehrwert des Ersatzwiderstandes. Die Situation ist also genau umgekehrt zu der bei Kondensatoren (vgl. Gleichungen (2.31) und (2.32)).

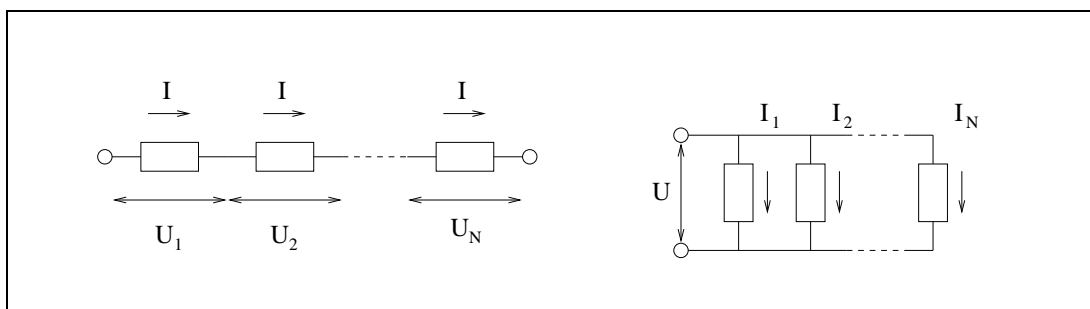


Abb. 4.5 Serienschaltung und Parallelschaltung von Widerständen

4.4.1 Ein einfaches Beispiel

Wir betrachten die nebenstehende Vernetzung von Widerständen. Gesucht ist der Ersatzwiderstand der Schaltung. Dabei müssen wir ganz zu Beginn festlegen, in welche Richtung der Strom fließen soll. Es ist dabei unwichtig, ob der Strom im Endeffekt wirklich diese Richtung nimmt, wichtig ist nur, daß wir bei dieser Konvention bleiben, die natürlich auch etwas über die Vorzeichen der Spannungen im Netzwerk aussagt. Festgelegt sind lediglich der Strom der Stromquelle und deren Spannung, die beide vom Plus- zum Minuspol gezählt werden. Nun wenden wir konsequent die Kirchhoffschen Gesetze an. Die Knotenregel liefert folgende vier Gleichungen:

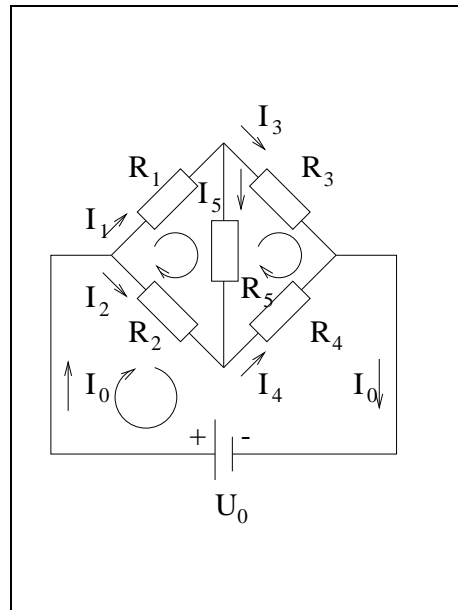


Abb. 4.6 Einfaches Netzwerk

$$I_0 = I_1 + I_2 \quad I_1 = I_3 + I_5 \quad I_4 = I_2 + I_5 \quad I_0 = I_3 + I_4. \quad (4.19)$$

Die Maschenregel ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= U_1 + U_5 - U_2 = R_1 I_1 + R_5 I_5 - R_2 I_2 \\ 0 &= U_3 - U_4 - U_5 = R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_5 I_5 \\ U_0 &= U_1 + U_3 = R_1 I_1 + R_3 I_3 \\ U_0 &= U_2 + U_4 = R_2 I_2 + R_4 I_4. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Aufzulösen ist dieses Gleichungssystem nach den Stromstärken. Zunächst einmal scheint das Gleichungssystem überbestimmt zu sein, doch erkennt man schnell, daß die jeweils die letzte Gleichung aus den drei vorangegangenen ergibt. Da diese Überbestimmtheit und damit mögliche Unlösbarkeit des Problems physikalisch ebenso unsinnig ist wie die Unterbestimmtheit des Systems, also der Existenz einer ganzen Klasse von Lösungen, kann man sich an das folgende Rezept halten:

Ist n_K die Anzahl der Knoten, so verwende man $n_K - 1$ Knotengleichungen und ergänze sie durch so viele Maschengleichungen, daß die Zahl der Gleichungen gleich der Zahl der Ströme ist. Dabei sollten diese Maschengleichungen sämtliche Widerstände und die angelegte Spannung U_0 enthalten, sonst ist die Gefahr gegeben, daß die Gleichungen linear abhängig voneinander sind und somit das System unterbestimmt wird.

Zur Lösung des vorliegenden Problems verwenden wir daher jeweils die ersten drei Gleichungen und erhalten nach längerer Rechnung für den Ersatzwiderstand den Wert

$$R = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)R_5 + R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4}{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)R_5 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (4.21)$$

und beispielsweise für den Strom I_5 den Wert

$$I_5 = \frac{U_0(R_2R_3 - R_1R_4)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)R_5 + R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4}. \quad (4.21)$$

4.4.2 Die Wheatstone'sche Brücke

Nach eben diesem Prinzip ist die *Wheatstone'sche Brücke* ausgebaut, die dazu dienen kann, Widerstände im Vergleich zu messen. Statt des Widerstandes R_5 ist hier ein Strommeßgerät eingebaut, die beiden Widerstände R_2 und R_4 sind zu einem Schiebewiderstand kombiniert, es gilt $R_2 = xR_m$ und $R_4 = (1-x)R_m$ für $x \in [0, 1]$. $R_0 = R_3$ ist ein Referenzwiderstand mit genau bekanntem Wert, $R_x = R_1$ der auszumessende Widerstand.

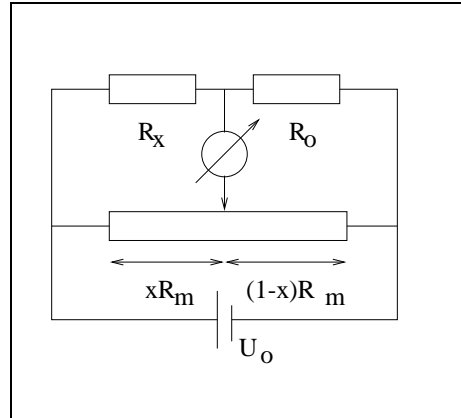


Abb. 4.7 Wheatstone'sche Brücke

Der Schiebewiderstand wird nun so eingestellt, daß die Brücke, also die Verbindung über das Meßgerät, stromlos wird. Aus Gleichung (4.21) entnehmen wir dann

$$I_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_x}{R_0} = \frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} = \frac{xR_m}{(1-x)R_m} = \frac{x}{1-x}. \quad (4.22)$$

4.5 Messung von Spannungen und Strömen

Wir haben bereits von einem „Strommeßgerät“ gesprochen, ohne eigentlich zu wissen, um was für ein Gerät es sich dabei handelt, welche Eigenschaften es haben muß, um seiner Aufgabe gerecht zu werden. Verwendung finden sowohl für die Strom- wie für die Spannungsmessung Drehspulmeßinstrumente, die jedoch unterschiedliche *Innenwiderstände* besitzen. Und gerade hierauf kommt es an. Sie werden entsprechend als *Ampèremeter* und *Voltmeter* bezeichnet.

4.5.1 Strommessung

Für die Messung des Stroms, der durch ein Netzwerk fließt, wird ein Ampèremeter mit dem Netzwerk in Serie geschaltet. Der nun durch das Meßgerät wie durch das Netzwerk fließende Strom verringert sich um den Faktor, um den sich der Widerstand erhöht. Die Messung liefert also dann ein realistisches Ergebnis, wenn der Innenwiderstand R_m des Ampèremeters klein gegenüber dem Widerstand des Netzwerkes ist.

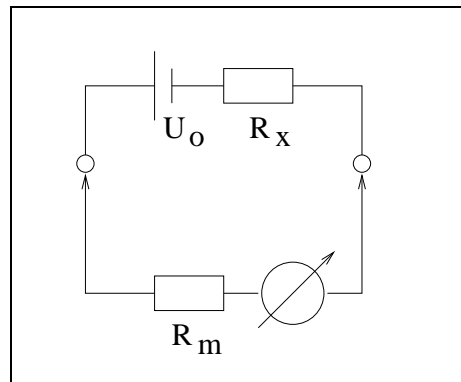


Abb. 4.8 Prinzip des Ampèremeters

Eine *Meßbereichserweiterung* können wir erzielen, indem wir mit einem Teil des Stromes das Meßgerät meiden, also durch Parallelschaltung von Widerständen R_p , die etwa in der Größe des Innenwiderstandes des Ampèremeters oder darunter liegen. Zeigt das Ampèremeter beispielsweise bei 1A Vollausschlag, wollen wir damit aber einen Strom bis zu 10A messen, so muß gelten:

$$10 = \frac{I_m + I_p}{I_m} = \left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_p} \right) \left(\frac{1}{R_m} \right)^{-1} = 1 + \frac{R_m}{R_p} \Rightarrow R_p = \frac{1}{9} R_m. \tag{4.23}$$

4.5.2 Spannungsmessung

Die Spannungsmessung erfolgt durch Parallelschaltung eines Voltmeters. Dadurch wird ein Teil des Stroms abgespalten, was die Messung verfälscht. Ist jedoch der Innenwiderstand R_m des Voltmeters groß gegenüber dem Widerstand des Netzwerkes, so ist diese Stromabzweigung zu vernachlässigen.

Hier läßt sich eine Meßwerterweiterung erreichen, indem bereits ein Teil der Spannung an anderen Widerständen abfällt, das Voltmeter also mit Widerständen R_s in Serie geschaltet wird. Wieder wollen wir als Beispiel den Meßbereich um einen Faktor zehn erhöhen. Lag der Vollausschlag des Voltmeters ohne Erweiterung bei 1V, so soll er nun 10V betragen. Dazu berechnen wir

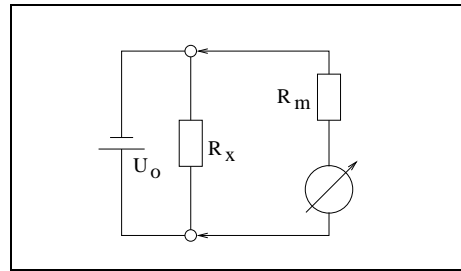


Abb. 4.9 Prinzip des Voltmeters

$$10 = \frac{U_m + U_s}{U_m} = \frac{R_m + R_s}{R_m} = 1 + \frac{R_s}{R_m} \Rightarrow R_s = 9R_m. \tag{4.24}$$

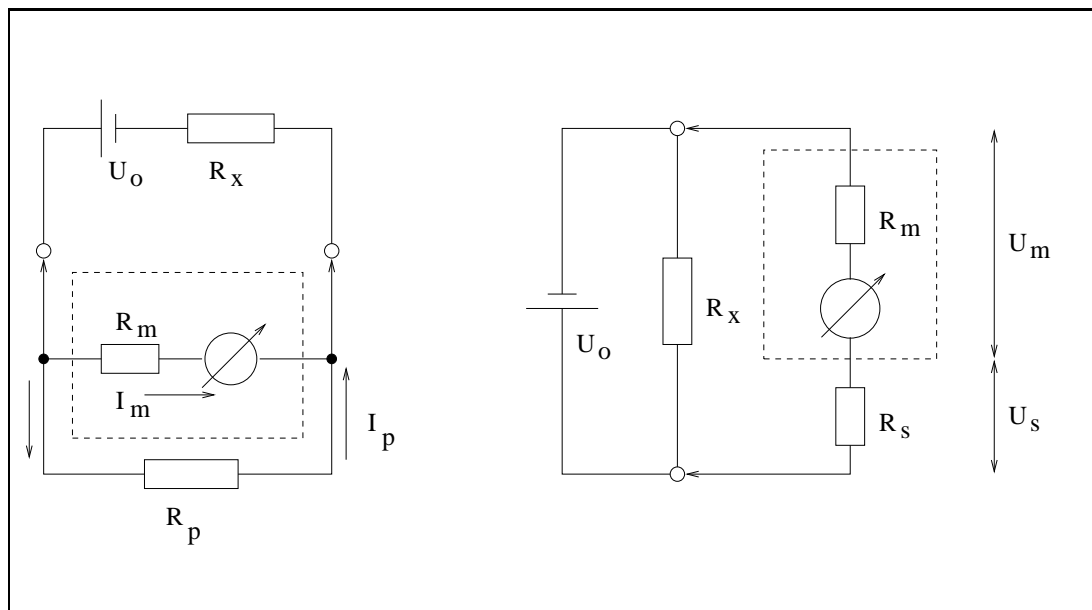


Abb. 4.10 Meßbereichserweiterungen für Ampèremeter und Voltmeter

4.6 Kondensator im Widerstandsnetz

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir einen nichtstationären Strom betrachten, wie er beispielsweise beim Zusammenschalten von Widerstand und Kondensator entsteht. Zunächst wollen wir anschaulich überlegen, wie sich eine Serienschaltung dieser beiden Elemente verhält, wenn die an eine Spannungsquelle angeschlossen werden. Der Strom, der über den Widerstand fließt, lädt den Kondensator auf. Dabei kann nicht davon ausgegangen werden, daß dieser Strom zeitlich konstant ist, denn der Kondensator läuft irgendwann unweigerlich in die Sättigung. Es ist daher sinnvoll, den Strom nicht weiter als Ladungsmenge pro Zeiteinheit zu betrachten, sondern differentiell als zeitliche Ableitung der Ladung.

Damit aber wird die Gleichung

$$U_0 = U_R + U_C = RI + \frac{Q}{C} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q \Rightarrow RC \frac{dQ}{dt} + Q = CU_0 \quad (4.25)$$

zu einer Differentialgleichung. Die zugehörige homogene Differentialgleichung besitzt die Lösung

$$Q_{\text{hom}}(t) = Ae^{-t/RC}, \quad (4.26)$$

die inhomogene Gleichung selbst die spezielle Lösung $Q_{\text{part}} = CU_0$, und setzen wir in die Summe dieser beiden Anteile die Anfangsbedingung $Q(0) = 0$ ein, so erhalten wir

$$Q(t) = CU_0 (1 - e^{-t/RC}). \quad (4.27)$$

Ersetzen wir nun die Spannungsquelle durch ein Stück Draht, schließen also den Stromkreis kurz, so entlädt sich der Kondensator. In Gleichung (4.25) ist dann U_0 durch 0 zu ersetzen, und die Gleichung hat daher auch nur den homogenen Anteil (4.26). Einsetzen der Anfangsbedingung $Q(0) = Q_0$ liefert hier

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}. \quad (4.28)$$

Daß der Strom beim Laden des Kondensators tatsächlich nicht konstant ist, erkennen wir durch einfaches Ableiten der Funktion $Q(t)$ aus Gleichung (4.27). Wir erhalten dann nämlich

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/RC}, \quad (4.29)$$

und die Spannung, die am Widerstand abfällt, ist entsprechend

$$U_R(t) = U_0 e^{-t/RC}. \quad (4.30)$$

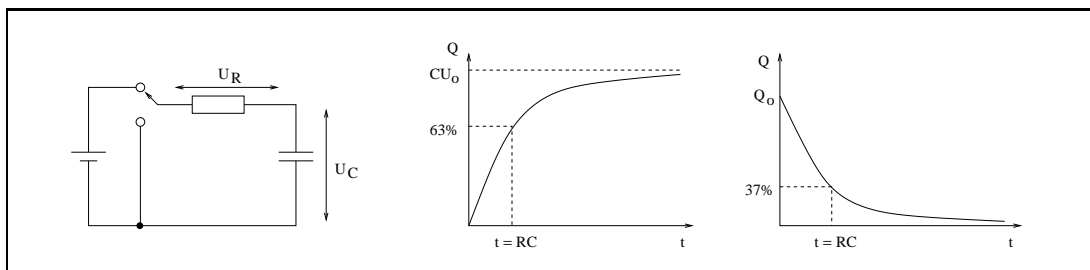


Abb. 4.11 Serienschaltung von Widerstand und Kondensator

5. Magnetostatik

Wir beginnen dieses Kapitel gleich mit einem Experiment, das uns am Ende dazu führen wird, ein neues Feld einzuführen, das magnetische Feld. Dazu betrachten wir zwei stromdurchflossene Drähte, die dicht nebeneinander aufgehängt sind. Lassen wir durch jeden einen Strom fließen, der in dieselbe Richtung weist, so ziehen sich die Drähte an, fließen sie in entgegengesetzte Richtung, so stoßen sie sich ab.

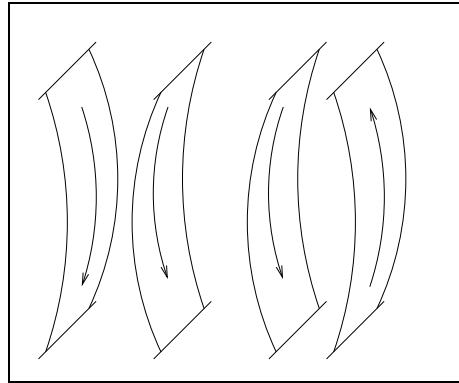


Abb. 5.1 Wechselwirkung stromdurchflossener Drähte

Womit ist dieser Effekt zu erklären? Tatsache ist, daß hier bewegte Ladungsträger vorliegen. Kann man vielleicht ein Bezugssystem finden, in dem die Ladungsträger ruhen und wo das Phänomen ein rein elektrisches ist? Schon im ersten Fall versagt dieser Versuch. Gehen wir ins Ruhesystem der Elektronen, so müßten diese sich abstoßen und nicht anziehen. Ein Gedankenexperiment, in dem wir zwei „Elektronenkanonen“ nebeneinander stellen und die Wirkung der herausgeschleuderten Elektronen aufeinander beobachten, bestätigt dies. Außerdem wird die Ladung der Elektronen durch das Metall ja genau kompensiert. Im zweiten Fall können wir gar nicht erst ein solches gemeinsames Ruhesystem finden.

5.1 Magnetostatik als relativistischer Effekt

Eine Theorie, die bestens mit verschiedenen Ruhesystemen umzugehen weiß, ist die spezielle Relativitätstheorie Albert Einsteins (1879–1955). Sie wird uns auch in diesem Fall helfen, den Effekt zu erklären. Es ist eine etwas unkonventionelle Vorgehensweise, gewiß, aber sie steht in direkter Fortsetzung der bisherigen Kapitel und konstruiert das magnetische Feld nicht ad hoc. Wir machen zuvor jedoch die folgenden unverzichtbaren Annahmen:

1. Die Ladungserhaltung, die sich in dem Gaußschen Satz

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (5.1)$$

ausdrückt, gilt unabhängig vom Bewegungszustand, in dem sich die Ladungen, aus denen sich Q zusammensetzt, voneinander befinden. Diese Annahme wird experimentell dadurch gestützt, daß Atome und Moleküle, in welchem Schwingungszustand sie sich auch befinden, stets elektrisch neutral bleiben.

2. Im Ruhesystem der Quellladung Q gilt das Coulombsche Gesetz, die ruhende Quellladung erzeugt also ein elektrisches Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (5.2)$$

3. Ort, Zeit sowie Impuls und Energie eines Teilchens transformieren sich aus einem System S in ein dazu gleichförmig mit der Geschwindigkeit v entlang der x -Achse bewegtes System S' gemäß den Lorentztransformationen

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + \beta ct'), & y &= y' & p_x &= \gamma(p'_x + \frac{\beta}{c}E'), & p_y &= p'_y \\ t &= \gamma(t' + \frac{\beta}{c}x'), & z &= z' & E &= \gamma(E' + \beta cp'_x), & p_z &= p'_z \end{aligned} \quad (5.3)$$

mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ und $\beta = v/c$.

5.1.1 Lorentztransformation des elektrischen Feldes

Wir wollen den Gaußschen Satz dazu benutzen, die Transformation des elektrischen Feldes parallel und senkrecht zur Bewegungsrichtung zu bestimmen. Als Testobjekt dient uns das homogene elektrische Feld eines Plattenkondensators. Wir legen nun in Gedanken einen flachen Kasten um die Kondensatoroberfläche, der mit der einen Fläche knapp oberhalb der Platte endet, mit der anderen eben in diese eintaucht. Die Ladung, die in diesen Kasten eingeschlossen ist, sei Q . Dann liefert der Gaußsche Satz für das elektrische Feld einen Wert von $E = Q/\varepsilon_0\Delta F$, wobei ΔF die Fläche des Kastens ist.

Bewegen wir uns nun relativistisch zu diesem Kasten entlang den Kondensatorplatten und beobachten wir die Kondensatorplatte zu einem festen Zeitpunkt t' unseres bewegten Systems, so scheint die Längenskala in Flugrichtung und damit die Flächenelemente um einen Faktor γ^{-1} verkürzt. Der Kasten ist also kleiner geworden, enthält aber nach wie vor dieselbe Ladungsmenge. Dies ist eine Konsequenz der Gültigkeit des Gaußschen Satzes auch für bewegte Systeme, die wir postuliert hatten. Für das elektrische Feld senkrecht zur Flugrichtung gilt also

$$E'_\perp = \frac{Q}{\varepsilon_0\Delta F'} = \frac{Q}{\varepsilon_0\gamma^{-1}\Delta F} = \frac{\gamma Q}{\varepsilon_0\Delta F} = \gamma E_\perp. \quad (5.4)$$

Bewegen wir uns dagegen senkrecht zu den Kondensatorplatten, so werden die unwichtigen und daher klein gewählten Kanten des Kastens verkürzt, das elektrische Feld bleibt also erhalten, $E'_\parallel = E_\parallel$.

5.1.2 Elektrisches Feld einer bewegten Punktladung

Diese Eigenschaft des elektrischen Feldes gilt nun nicht nur für den Plattenkondensator, sondern allgemein. So können wir beispielsweise das elektrische Feld einer Punktladung q betrachten. Seine x - und z -Komponente sind

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= \frac{q\Delta x}{4\pi\varepsilon_0(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{3/2}}, \\ E_z(x, y, z) &= \frac{q\Delta z}{4\pi\varepsilon_0(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Es ist nun egal, ob sich die Ladung selbst bewegt oder ob eine ruhende Ladung aus einem bewegten System betrachtet wird. Wir wollen letzteren Weg

einschlagen. Von einem in x -Richtung mit der Geschwindigkeit v bewegten System aus betrachtet verkürzt sich die Länge Δx auf $\Delta x'$, es gilt also

$$E'_x(x', y', z') = E_x(x, y, z) = \frac{q\gamma\Delta x'}{4\pi\epsilon_0(\gamma\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2)^{3/2}}. \quad (5.6)$$

Für die z -Komponente gilt andererseits

$$E'_z(x', y', z') = \gamma E_z(x, y, z) = \frac{\gamma q\Delta x'}{4\pi\epsilon_0(\gamma\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2)^{3/2}}. \quad (5.7)$$

Erstaunlicherweise ist weiterhin $E_{x'}/E_{z'} = x'/z'$, das Feld ist also nach wie vor radial, wenn auch nicht radialsymmetrisch. Für seinen Betrag erhalten wir

$$\begin{aligned} E' &= \frac{\gamma q \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2}}{4\pi\epsilon_0(\gamma^2\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{q\Delta r'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{(\Delta x'^2 + (1 - \beta^2)(\Delta y'^2 + \Delta z'^2))^{3/2}} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\Delta r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

wobei θ der Polarwinkel zur x -Achse ist. Es ergibt sich

$$E'(\theta = 0^\circ) = \frac{q(1 - \beta^2)}{4\pi\epsilon_0\Delta r'^2} \quad \text{und} \quad E'(\theta = 90^\circ) = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0\Delta r'^2}. \quad (5.9)$$

Betrachten wir wiederum die Ladung als bewegt, so erkennen wir, daß sich die Feldlinien in Bewegungsrichtung verdünnen, senkrecht dazu verdichten.

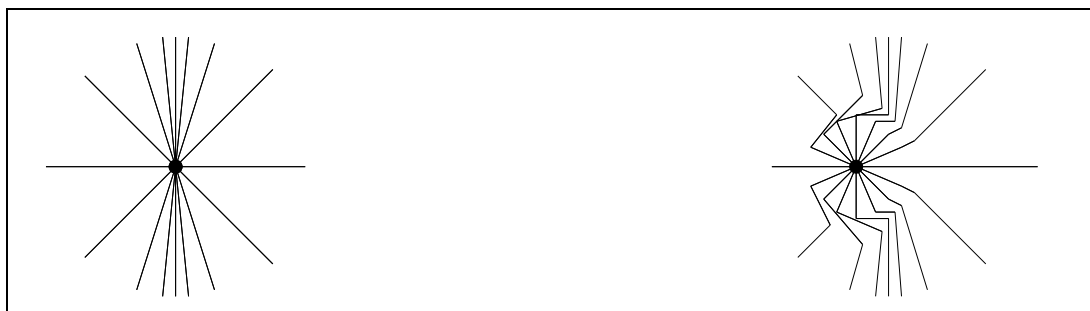


Abb. 5.2 Elektrisches Feld einer bewegten Punktladung

Die Rotation des elektrischen Feldes verschwindet nicht. Wird die Punktladung indes abrupt abgebremst, so werden die Feldlinien wieder äquidistant. Dieser Vorgang breitet sich innerhalb einer Kugel mit der Lichtgeschwindigkeit radial nach außen aus. Außerhalb dieser Kugel scheint sich die Ladung weiterhin zu bewegen. Auf der gedachten Kugeloberfläche kommt es wegen der Stetigkeit zu einem zirkulären elektrischen Feld, zu einer Art Schockwelle.

5.1.3 Kraft bewegter Quelladungen

Wieder lassen wir die Ladung ruhen und bewegen uns relativ zu ihr. Diesmal sollen auch die Änderungen des Impulses und der Energie gemäß Gleichung (5.3) betrachtet. Wir wollen die Kraft berechnen, welche eine ruhende Quellladung auf ein in unserem bewegten System ruhende Ladung ausübt. Dabei soll die Probeladung in Ruhe bleiben, $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$, und damit auch keine Energie gewinnen können, $\Delta E' = 0$. Es ergibt sich dann

$$F'_x := \frac{\Delta p'_x}{\Delta t'} = \frac{\gamma^{-1} \Delta p_x}{\gamma^{-1} \Delta t} = F_x \quad \text{und} \quad F'_z := \frac{\Delta p'_z}{\Delta t'} = \frac{\Delta p_z}{\gamma^{-1} \Delta t} = \gamma \frac{\Delta p_z}{\Delta t} = \gamma F_z$$

oder $\vec{F}'_{\parallel} = \vec{F}_{\parallel}, \quad \vec{F}'_{\perp} = \gamma \vec{F}_{\perp}.$ (5.9)

Zu beachten ist, daß die Kraft *kein* Vierervektor ist. Sie verhält sich auch umgekehrt zum elektrischen Feld. Wir erkennen leicht, daß wir durch die Relativbewegung einer Probeladung zu einer Quellladung zunächst nichts gewonnen haben. Ist nämlich im Ruhesystem der Probeladung das elektromotorische Kraftgesetz als $\vec{F}' = q \vec{E}'$ gegeben, so gilt im Ruhesystem der Quellladung

$$\vec{F}_{\parallel} = \vec{F}'_{\parallel} = q \vec{E}'_{\parallel} = q \vec{E}_{\parallel} \quad \text{und} \quad \vec{F}_{\perp} = \gamma^{-1} \vec{F}'_{\perp} = \gamma^{-1} q \vec{E}'_{\perp} = q \vec{E}_{\perp}. \quad (5.10)$$

5.1.4 Wirkung unterschiedlich bewegter Quelladungen

Die Situation verändert sich, wenn sich kein gemeinsames Ruhesystem für die verschiedenen Quelladungen finden läßt, die auf eine Probeladung wirken. Wir nehmen an, daß es in einem stromdurchflossenen Draht positive und negative Ladungsträger gebe. Im Ruhesystem des Drahtes oder Laborsystems kompensieren die Ladungen sich gerade. Daher üben sie keine Kraft auf eine in diesem System ruhende Probeladung aus. Doch wie sieht es aus, wenn sich die Probeladung bewegt?

Bewegt sich die Probeladung parallel zum Draht, also parallel zur Bewegungsrichtung der Ladungsträger, so kann es sehr wohl zu einer Wirkung der Quelladungen auf die Probeladung kommen. Wie beim Plattenkondensator kommt es nun zur Veränderung des elektrischen Feldes beider Komponenten, das sich dann nicht mehr kompensiert. Um dies zu berechnen, bezeichnen wir die Ruhesysteme der verschiedenen Quelladungskomponenten mit S_k , das Laborsystem mit S und das Ruhesystem der Probeladung mit S' . Diese Bezeichnungen werden in diesem Abschnitt auch die Größen $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ zieren und darauf hindeuten, daß in ihnen jeweils die Relativgeschwindigkeit zu verwenden ist. Betrachtet werden braucht lediglich die senkrechte Komponente der Felder und Kräfte, da die parallele wie gesehen unverändert bleibt.

Von S oder S' aus betrachtet gilt für das elektrische Feld der Quelladungen des Typs k

$$\vec{E}_{\perp k}(S') = \gamma(S', S_k) \vec{E}_{\perp k}(S_k) \quad \text{und} \quad \vec{E}_{\perp k}(S) = \gamma(S, S_k) \vec{E}_{\perp k}(S_k). \quad (5.11)$$

Die Gesamtkraft auf die Probeladung ist also in ihrem Ruhesystem

$$\begin{aligned}\vec{F}_\perp(S') &= q \sum_k \vec{E}_{\perp k}(S') = q \sum_k \gamma(S', S_k) \vec{E}_{\perp k}(S_k) = \\ &= q \sum_k \gamma(S', S_k) \gamma(S, S_k)^{-1} E_{\perp k}(S).\end{aligned}\quad (5.12)$$

Ins Laborsystem übersetzt, ist die Kraft dann

$$\vec{F}_\perp(S) = q \sum_k \gamma(S', S)^{-1} \gamma(S', S_k) \gamma(S, S_k)^{-1} \vec{E}_{\perp k}(S).\quad (5.13)$$

Der Koeffizient ist zu berechnen. Die Relativgeschwindigkeiten zwischen S und S_k sowie zwischen S und S' sind als $v_k = \beta_k c$ bzw. $v = \beta c$ einfach einzusetzen, für die Relativgeschwindigkeit zwischen S' und S_k ergibt sich, sofern diese Bewegungen entlang derselben Achse stattfinden, nach dem Additionstheorem

$$v'_k = \beta'_k c = \frac{(\beta - \beta_k)c}{1 - \beta\beta_k}.\quad (5.14)$$

Damit berechnet sich

$$\begin{aligned}\frac{\gamma(S', S_k)}{\gamma(S', S)\gamma(S, S_k)} &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{1 - \beta_k^2}}{\sqrt{1 - \beta_k'^2}} = \frac{(1 - \beta\beta_k) \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{1 - \beta_k^2}}{\sqrt{(1 - \beta\beta_k)^2 - (\beta - \beta_k)^2}} = \\ &= \frac{(1 - \beta\beta_k) \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{1 - \beta_k^2}}{\sqrt{1 - \beta^2 - \beta_k^2 + \beta^2 \beta_k^2}} = 1 - \beta\beta_k.\end{aligned}\quad (5.14)$$

Wir erhalten also die einfache Beziehung

$$\vec{F}_\perp(S) = q \sum_k (1 - \beta\beta_k) \vec{E}_{\perp k}(S) = q \vec{E}_\perp(S) - qv \sum_k \frac{v_k}{c^2} \vec{E}_{\perp k}(S).\quad (5.15)$$

Die Zusatzkraft proportional zur Geschwindigkeit wird folgerichtig als *Lorentzkraft* bezeichnet, da sie sich aus Lorentztransformationen ergibt. Für den elektrisch neutralen Draht ist $\vec{E}(S) = \sum_k \vec{E}_k = 0$, aber auch der allgemeinere Fall wird mit dieser Rechnung erfaßt. Zu fragen ist natürlich, was mit einer Probeladung geschieht, die sich senkrecht zum Leiter bewegt. Auch hier kann Gleichung (5.13) angewandt werden, jedoch ist das Additionstheorem ein anderes, nämlich

$$\beta_k'^2 = \beta^2 + \frac{\beta_k^2}{\gamma(S, S')^2} = \beta^2 + (1 - \beta^2) \beta_k^2,\quad (5.16)$$

damit gilt

$$\frac{\gamma(S', S_k)}{\gamma(S', S)\gamma(S, S_k)} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{1 - \beta_k^2}}{\sqrt{1 - \beta^2 - (1 - \beta^2) \beta_k^2}} = 1,\quad (5.17)$$

also

$$\vec{F}_\perp(S) = q \vec{E}_\perp(S).\quad (5.18)$$

Die neue Kraftkomponente wirkt also nur für eine Ladung, die sich parallel zum Leiter bewegt, und diese Lorentzkraft wirkt senkrecht zu dieser Richtung. Wir können sie daher als Vektorprodukt mit einer dritten Größe schreiben, die wir mit \vec{B} bezeichnen und deren Bedeutung uns hier zunächst unklar bleibt. Dann lauten die Gleichungen (5.15) und (5.18) zusammengefaßt

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).\quad (5.19)$$

5.2 Das magnetische Feld

Das elektrische Feld eines geladenen Fadens hatten wir bereits im ersten Kapitel berechnet. Es war gegeben durch $\lambda/2\pi\epsilon_0 r$, wobei λ die Linienladungsdichte bezeichnete. Diese verbindet sich nun mit der Geschwindigkeit v_k der Ladungsträger zum Strom $I = \lambda_k v_k$. Für den Betrag der Größe \vec{B} gilt daher

$$|\vec{B}| = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}. \quad (5.20)$$

Der Vektor \vec{B} weist dabei an jedem Punkt in eine Richtung, die senkrecht zur Radialrichtung und senkrecht zur Drahtrichtung zirkulär um den Draht herum läuft. Diese Vektoren zusammen bilden ein Feld, das *magnetische Feld* $B(\vec{r})$. Der Einheit des magnetischen Feldes trägt seinen Namen von dem amerikanischen Physiker Nicola Tesla (1856–1943), es ist $1T = 1\text{kg}/C\text{s}$. Wir wollen sehen, welchen Integralsätzen dieses Feld genügt.

5.2.1 Fluß des magnetischen Feldes

Der *magnetische Fluß* Φ_M durch eine Fläche S ist gegeben durch

$$\Phi_M = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}. \quad (5.21)$$

Seine Einheit ist nach dem deutschen Physiker Wilhelm Eduard Weber (1804–1891) benannt, $1W = 1T\text{m}^2$. Zur Berechnung des Flusses durch eine geschlossene Fläche legen wir einen Zylinder achsensymmetrisch um den elektrischen Strom, wie in Abbildung 5.3(a) gezeigt. Wir erkennen, daß weder auf den Stirnseiten noch auf dem Mantel ein Beitrag zustandekommt, da stets der Vektor des magnetischen Feldes in diesen Flächen liegt. Nun versuchen wir es mit einem Zylinderrohrsegment, wie in Abbildung 5.3(b) zu sehen. Zwar gibt es nun Flächen, die zum magnetischen Feld senkrecht stehen, doch sind die Beiträge der beiden gegenüberliegenden Flächenelemente gleich groß. Auch hier verschwindet der Fluß. Eine beliebige geschlossene Fläche schließlich läßt sich aus beliebig feinen Elementen beider Kategorien aufbauen. Da die verbindenden Flächen jeweils kompensierende Beiträge liefern, gilt allgemein für jede geschlossene Fläche

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0. \quad (5.22)$$

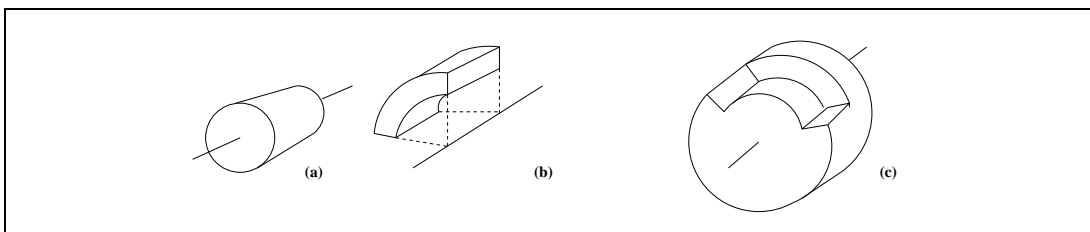


Abb. 5.3 Geschlossene Flächenintegrale zur Bestimmung des magnetischen Flusses

Dies hat zur Folge, daß die Fläche, durch die der Fluß berechnet wird, eindeutig durch ihre Randkurve gegeben ist. Fügt man nämlich zwei Flächen mit derselben Randkurve zusammen, so gelangt man zu einer geschlossenen Fläche, durch die der Fluß verschwindet.

5.2.2 Zirkulation des magnetischen Feldes

Wir betrachten den Weg (a) in Abbildung 5.4. Er beginnt an einem Punkt im Abstand r_1 zum senkrecht in die Zeichenebene fließenden Strom. Entlang des ersten, radialen Wegs zum Abstand r_2 stehen Richtungsvektor und magnetischer Feldvektor senkrecht aufeinander, hierher kommt also kein Beitrag. Dasselbe gilt für den dritten Weg, der vom Abstand r_2 zurück zum Abstand r_1 führt. Dagegen liefern die beiden zirkulären Anteile des Wegs Beiträge. Da jedoch die magnetische Feldstärke umgekehrt proportional, der Weg aber direkt proportional zum Abstand vom Draht ist, sind diese Beiträge entgegengesetzt gleich groß, heben sich also weg. Ein ebensolches Ergebnis erhalten wir, wenn wir den Weg noch feiner in Wege zirkulär und radial zum Strom unterteilen, wie es in Abbildung 5.4(b) dargestellt ist. Auch Wegkomponenten parallel zum Draht ändern nichts daran. In allen Fällen verschwindet das Umlaufintegral.

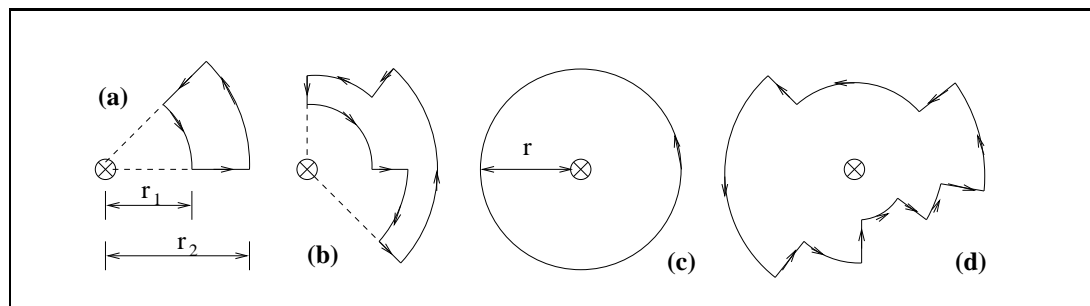


Abb. 5.4 Geschlossene Wegintegrale zur Bestimmung der Zirkulation des magnetischen Feldes

Ganz anders verhält es sich, wenn wir den stromführenden Draht von diesem Integrationsweg umschließen. Halten wir zunächst wie in Abbildung 5.4(c) einen festen Abstand r ein, so gilt

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} 2\pi r = \frac{I}{\epsilon_0 c^2} =: \mu_0 I. \quad (5.23)$$

Die Zirkulation des magnetischen Feldes ist also proportional zum eingeschlossenen Strom. Daran ändern auch in diesem Fall feinere Abstufungen des Weges nichts, wie in Abbildung 5.4(d) dargestellt. Wird der stromführende Draht gar n mal umfahren, so ergibt sich die Zirkulation $n\mu_0 I$. Die Proportionalität wird durch die *Permeabilitätskonstante* μ_0 vermittelt. Aus der Herleitung des magnetischen aus dem elektrischen Feld im letzten Abschnitt folgt also, daß diese eine abgeleitete Größe ist und über

$$\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2} \quad (5.24)$$

mit der Dielektrizitätskonstante in Verbindung steht. Gleichung (5.23) stellt das *Ampèresche Gesetz* in seiner stationären Form dar.

5.2.3 Divergenz und Rotation des magnetischen Feldes

Über die Integralsätze lassen sich Fluß und Zirkulation erneut differentiell darstellen. Auf der anderen Seite kann der Strom durch die Stromdichte \vec{j} ausgedrückt werden. Die Beziehung

$$I = \int_{A(C)} \vec{j} \cdot d\vec{a}, \quad (5.25)$$

läßt jedoch zunächst eine gewisse Willkür zu, denn $A(C)$ bezeichnet die Fläche, welche der bei der Zirkulation verwendete Weg einschließt. Und diese ist nicht eindeutig festgelegt. Ist $A'(C)$ eine andere solche Fläche, so schließen diese beiden ein Volumen $V(A, A', C)$ ein, und es gilt nach der Kontinuitätsgleichung

$$\int_{A'(C)} \vec{j} \cdot d\vec{a} - \int_{A(C)} \vec{j} \cdot d\vec{a} = \int_{V(A, A', C)} \operatorname{div} \vec{j} dV = \int_{V(A, A', C)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \int_{V(A, A', C)} \rho dV = \frac{dQ}{dt}, \quad (5.26)$$

wenn Q die im Volumen eingeschlossene Ladung ist. Die Beziehung (5.27) gilt also nur dann, wenn die Ladung in jedem Volumenelement unverändert bleibt. Wir sprechen dann von einem *stationären Strom*. So gilt schließlich für diesen Fall

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_{V(S)} \operatorname{div} \vec{B} dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{und} \quad (5.27)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{A(C)} \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \mu_0 \int_{A(C)} \vec{j} \cdot d\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (5.28)$$

5.3 Das Vektorpotential

Die Gleichung $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0$ läßt sich durch den Ansatz $\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r})$ lösen, denn für jedes Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ gilt $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = 0$. Das hier verwendete Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ wird in Analogie zum skalaren Potential des elektrischen Feldes als *Vektorpotential* bezeichnet. Es ist allerdings wie dieses nicht eindeutig bestimmt. Um dies zu sehen, erinnern wir uns, daß ebenso $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f(\vec{r}) = 0$ gilt, wobei $f(\vec{r})$ eine beliebige Funktion des Ortes ist. Die Rotation von $\vec{A}(\vec{r})$ und

$$\vec{A}'(\vec{r}) := \vec{A}(\vec{r}) + \operatorname{grad} f(\vec{r}) \quad (5.29)$$

erbringen also dasselbe Ergebnis und mithin dasselbe magnetische Feld. Diese Freiheit in der Wahl eines zusätzlichen Gradienten nennen wir *Eichfreiheit*. Wie der Name es schon sagt, können wir diese Freiheit ausnutzen, um eine bestimmte *Eichung* zu wählen. Das werden wir gleich benutzen. Zuerst jedoch können wir den Ansatz auch in die zweite Gleichung (5.28) einsetzen. Es ergibt sich dann

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}). \quad (5.30)$$

Der Term mit der Divergenz von $\vec{A}(\vec{r})$ stört uns. Wir können aber die Eichfreiheit nutzen, um diese verschwinden zu lassen. Angenommen, die Divergenz von $\vec{A}(\vec{r})$ liefere eine Funktion $c(\vec{r})$. Dann ist die Eichfunktion $f(\vec{r})$ in Gleichung (5.29) so zu wählen, daß $\operatorname{div} \operatorname{grad} f(\vec{r}) = \Delta f(\vec{r}) = -c(\vec{r})$ ist. Dies ist aber die bereits bekannte Poissongleichung, die eine Lösung besitzt. Ohne diesen Weg im Detail zu gehen, können wir stattdessen einfach $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = 0$ setzen. Diese Eichung wird *Coulomb-Eichung* genannt. Mit ihr ergibt sich die Gleichung

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}). \quad (5.31)$$

Auch dies ist die Poissongleichung, allerdings für Vektoren. Sie läßt sich aber nach dem gleichen Schema behandeln wie im skalaren Fall und liefert die stationäre Lösung

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.32)$$

Merkmal der so geeichten Lösung ist, daß die Information über den Strom instantan an das Feld weitervermittelt wird. Dies gilt nicht mehr im dynamischen Fall, wie wir noch sehen werden.

5.4 Das Biot-Savart'sche Gesetz

Mit der Berechnung des Vektorpotentials aus der Stromdichte haben wir uns von dem geraden Draht selbständig gemacht. Aus einem gegebenen Verlauf des elektrischen Stromes kann nun also das Vektorpotential berechnet werden. Ist jedoch dieses bestimmt, so mit ihm auch das magnetische Feld. Doch gibt es einen direkteren Weg?

Der französische Physiker Jean Baptiste Biot (1774–1862) und sein Kollege Savart haben einen direkten Weg gefunden. Für einem angenommen beliebig dünnen Draht, der vom Strom I durchflossen wird, bestimmen wir zunächst das Vektorpotential. Betrachten wir das Integrationsvolumen der Formel (5.32), so kann dieses auf den Draht zusammengezogen werden. Es ist dann $\vec{j}(\vec{r}') dV' = I d\vec{r}'$, wobei $d\vec{r}'$ entlang des Drahtes gerichtet ist. Nun gilt für das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.33)$$

und damit für das magnetische Feld zunächst

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \operatorname{rot} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \right) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \operatorname{grad} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times d\vec{r}' = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Wir haben dabei die Beziehung $\operatorname{rot}(f(\vec{r})\vec{c}) = \operatorname{grad} f(\vec{r}) \times \vec{c}$ benutzt, wobei der die Rotation wie der Gradient in unserem Fall nur auf Funktionen von \vec{r} wirkte

und daher $d\vec{r}'$ wie den konstanten Vektor \vec{c} in der verwendeten Beziehung behandelte. Schließlich kann Stromstärke und Wegelement wieder vereinigt werden, es gilt somit

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (5.35)$$

Das *Biot-Savart'sche Gesetz* gilt dann auch wieder allgemeiner für beliebige Stromdichteverteilungen $\vec{j}(\vec{r}')$.

5.4.1 Magnetfeld eines Kreisstroms entlang der Achse

Wir wollen die Formel (5.34) gleich dazu verwenden, um ein einfaches Beispiel zu berechnen. Wir betrachten einen *Kreisstrom* und berechnen das Magnetfeld auf der Symmetrieachse dieses Kreises. Dazu wählen wir $\vec{r} = z\vec{e}_z$ und $\vec{r}' = b(\cos\phi\vec{e}_x + \sin\phi\vec{e}_y)$. Es ist nun

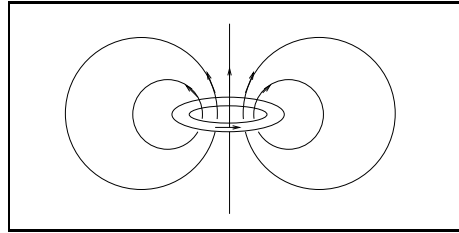


Abb. 5.5 Magnetfeld eines Kreisstroms

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + b^2}, \quad d\vec{r}' = b(-\sin\phi\vec{e}_x + \cos\phi\vec{e}_y)d\phi \quad \text{und} \quad (5.36)$$

$$(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}' = b((x \cos\phi + y \sin\phi)\vec{e}_z + z(\cos\phi\vec{e}_x + \sin\phi\vec{e}_y) - b\vec{e}_z)d\phi.$$

Da der Nenner offensichtlich nicht von ϕ abhängt, mitteln sich die Winkelfunktionen im Zähler heraus. Übrig bleibt

$$\begin{aligned} \vec{B}(0, 0, z) &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-b^2 \vec{e}_z d\phi}{(z^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi b^2 \vec{e}_z}{(z^2 + b^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi(z^2 + b^2)^{3/2}} \pi b^2 I \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Dabei ist $\vec{p}_M := \pi b^2 I \vec{e}_z$, also das Produkt aus Fläche und Stromstärke, das magnetische Analogon zum Dipolmoment. Wir sprechen hier vom *magnetischen Dipolmoment*. Für große Abstände gilt

$$\vec{B}(0, 0, z) \approx \frac{\mu_0}{2\pi z^3} \vec{p}_M. \quad (5.38)$$

5.4.2 Magnetfeld eines Kreisstroms in der Ebene

Bei der Berechnung des Magnetfeldes in der Ebene soll gleich für große Abstände genähert werden. Es gilt, übrigens auch im allgemeinen Fall in erster Ordnung in r'/r

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-3} = (r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2)^{-3/2} \approx \frac{1}{r^3} \left(1 + 3 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)$$

und damit

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \left(\frac{\vec{r} \times d\vec{r}'}{r^3} + 3 \frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{r}') \times d\vec{r}'}{r^5} - \frac{\vec{r}' \times d\vec{r}'}{r^3} \right). \quad (5.39)$$

Mit $\vec{r} \times d\vec{r}' = rr' \sin(\pi/2 + \phi) d\phi \vec{e}_z = rr' \cos \phi d\phi \vec{e}_z$, $\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' \cos \phi$ und $\vec{r}' \times d\vec{r}' = r'^2 d\phi \vec{e}_z$ verschwindet der erste der drei Terme, mit den anderen beiden ergibt sich

$$\vec{B}(x, 0, 0) \approx -\frac{\mu_0 I r'^2}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} (3 \sin^2 \phi - 1) d\phi \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 I r'^2}{4\pi r^3} \pi \vec{e}_z = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \vec{p}_M. \tag{5.40}$$

5.4.3 Magnetfeld einer Spule

Eine Spule kann als „Stapelung“ von Kreisströmen aufgefaßt werden. So kann das Magnetfeld als Überlagerung der Magnetfelder der Kreisströme berechnet werden. Wir betrachten die Spule der Länge L von einem Punkt $(0, 0, z)$ aus. Ist n die Zahl der Kreisströme pro Längeneinheit, so ist der Beitrag eines Spulenabschnitts der Dicke dz' in der Höhe z' nach Gleichung (5.37) gegeben durch

$$d\vec{B} = \frac{n\mu_0 I b^2 dz}{2((z' - z)^2 + b^2)^{3/2}} \vec{e}_z. \tag{5.41}$$

Insgesamt liefert die Integration mit der Substitution $z' - z = b \tan \phi$, mit $dz' = b d\phi / \cos^2 \phi$ und $(z' - z)^2 + b^2 = b^2 / \cos^2 \phi$ schließlich

$$\begin{aligned} \vec{B}(0, 0, z) &= \frac{n\mu_0 I}{2} \int_0^L \frac{b^2 dz}{((z' - z)^2 + b^2)^{3/2}} \vec{e}_z = \frac{n\mu_0 I}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{b^3 \cos^3 \phi d\phi}{b^3 \cos^2 \phi} \vec{e}_z = \\ &= \frac{n\mu_0 I}{2} (\sin \phi_2 - \sin \phi_1) \vec{e}_z. \end{aligned} \tag{5.42}$$

mit $\tan \phi_1 = -z/b$ und $\tan \phi_2 = (L - z)/b$. Man kann übrigens auch direkt mit den Winkeln argumentieren, welche die Blickwinkel zum unteren bzw. oberen Rand der Spule darstellen (vgl. Abbildung 5.6).

5.4.4 Magnetfeld einer unendlich langen Spule

Für diesen Sonderfall beschreiten wir einen einfacheren Weg, indem wir Symmetrieüberlegungen anstellen. Das Magnetfeld einer unendlich langen Spule kann nur parallel zu der Spulenachse verlaufen. Daher kann mit Wegen gearbeitet werden, die teils parallel, teils senkrecht zu den Feldlinien laufen. So gilt der Spezialfall

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \tag{5.43}$$

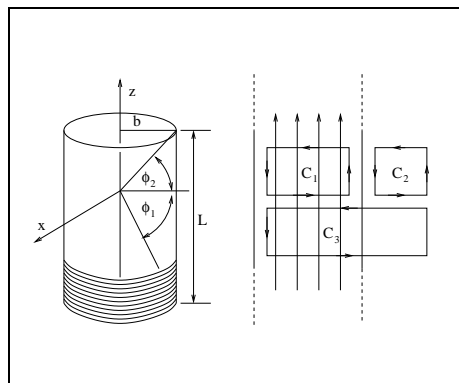


Abb. 5.6 Endliche und unendlich lange Spule

des Stokesschen Satzes für einen Weg C , der entweder ganz im Innern oder ganz außerhalb der Spule verläuft. Beispiele für einen solchen Weg sind die Wege C_1 und C_2 der Abbildung. Es ergibt sich jeweils die Gleichheit der Magnetfelder auf den beiden gegenüberliegenden Kanten parallel zur Spule, weil die anderen

beiden Seiten keinen Beitrag liefern, also die Konstanz des Magnetfeldes im gesamten Bereich. Für den Außenbereich bedeutet dies zunächst, daß dort das Magnetfeld verschwinden muß, da es sonst in jedem Abstand gleich groß wäre. Lassen wir den Weg zuletzt in Form von C_3 durch den Spulenmantel hindurchtreten, so liefert der vollständige Stokessche Satz (5.23)

$$\vec{B} = n\mu_0 I \vec{e}_z, \quad (5.44)$$

also den Spezialfall von Gleichung (5.42) für $\phi_1 = -\pi/2$ und $\phi_2 = +\pi/2$.

5.5 Energie des magnetischen Feldes

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir die Energie des magnetischen Feldes berechnen. Dazu betrachten wir wieder ein ideales Modell: eine unendlich ausgedehnte, zur (x, z) -Ebene parallele und stromdurchflossene Metallplatte der Dicke Δy . Die Stromrichtung sei die x -Achse, und um diese Stromrichtung legen wir einen rechteckigen Weg, der die Platte durchdringt. In dieser Richtung sei seine Abmessung klein, in der anderen besitze er die Länge Δz . Durch den umschlossenen Bereich der Platte fließt damit ein Strom $I = j \Delta y \Delta z$, der zu einem magnetischen Feld in z -Richtung parallel zur Platte führt. Ist B_- das magnetische Feld „hinter“ der Platte und B_+ dasjenige „vor“ ihr, gerechnet bezüglich der y -Achse, so gilt nach dem Stokesschen Satz

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = (B_- - B_+) \Delta z = \mu_0 I = \mu_0 j \Delta y \Delta z \quad \Rightarrow \quad B_- - B_+ = \mu_0 j \Delta y \quad (5.45)$$

und aus Symmetrieüberlegungen $B_- = -B_+ = \frac{1}{2} \mu_0 j \Delta y$. Stellen wir zwei solche Platten mit gegensinnig fließenden Strömen wie in Abbildung 6.1 gezeigt parallel nebeneinander, so addieren sich die magnetischen Felder im Zwischenraum zu $B = \mu_0 j \Delta y$, während sie sich im Außenbereich auslöschen. Auf den Strom jeder der Platten wirkt ein mittleres Feld $B^{\text{eff}} = \frac{1}{2} B_z$. Damit übt dieses Feld auf die im Strom bewegte Ladung $\rho \Delta V$ im Volumenelement $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ eine nach außen drückende Lorentzkraft

$$\Delta F = \rho v B^{\text{eff}} \Delta V = j B^{\text{eff}} \Delta V \quad (5.46)$$

aus. Der Druck auf die Platte und damit die Energiedichte des eingeschlossenen Feldes ist also

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta x \Delta z} = j B^{\text{eff}} \Delta y = \frac{1}{2} B j \Delta y = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad \Rightarrow \quad W_M = \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{B}^2 dV. \quad (5.47)$$

Die Aufintegration der Arbeit, die bei der Verlegung infinitesimaler stromführender Drähte von der einen zur anderen Platte, analog zum Gedankenexperiment im elektrostatischen Fall, ist eine weitere Möglichkeit, die Energie des magnetischen Feldes zu berechnen.

6. Magnetische Induktion

Wir knüpfen gleich an das zuletzt benutzte Modell an und setzen damit Überlegungen fort, die zu Beginn des Kapitels zum Begriff des magnetischen Feldes führten. Dort war das magnetische Feld aus dem elektrischen durch geeignete Relativbewegungen „entstanden“. Wir stellen uns folgerichtig die Frage, ob dies umgekehrt auch möglich ist, ob magnetisches und elektrisches Feld also so etwas wie duale Erscheinungen ein und desselben Phänomens sind.

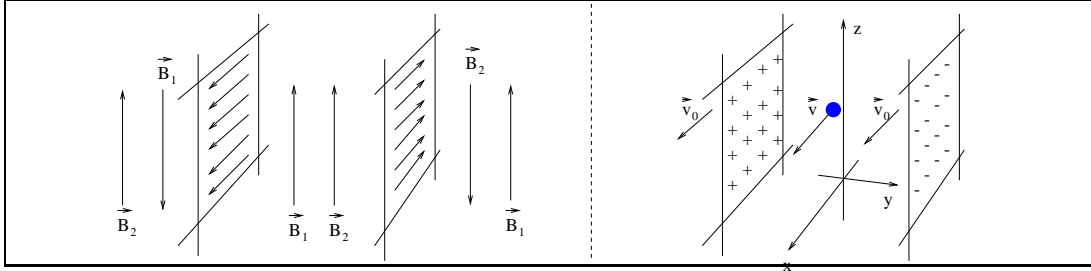


Abb. 6.1 Gedankenexperiment zur Dualität von elektrischem und magnetischem Feld

Die beiden stromdurchflossenen Platten werden durch zwei Kondensatorplatten ersetzt, die sich mit einer Geschwindigkeit v_0 gegenüber dem Laborsystem S in positive x -Richtung bewegen. Dann erzeugen sie sowohl ein elektrisches wie auch ein magnetisches Feld. Ist die Flächenladungsdichte im Laborsystem durch σ_0 gegeben, so berechnen sich die entsprechenden nichtverschwindenden Feldkomponenten zu

$$E_y = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad B_z = \mu_0 \sigma_0 v_0. \quad (6.1)$$

Im Ruhesystem S_0 der Platten ist die Ladungsdichte dagegen $\sigma_0(S_0) = \sigma_0/\gamma_0$. Ein Beobachter mit der Geschwindigkeit v relativ zum Laborsystem schließlich bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$v' = \beta'c = \frac{(\beta - \beta_0)c}{1 - \beta\beta_0}, \quad v = \beta c, \quad v_0 = \beta_0 c \quad (6.2)$$

zu den Platten (entsprechend die Platten mit $v'_0 = -v'$ relativ zum Beobachter), er mißt daher die Ladungsdichte

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma_0(S_0)\gamma' = \frac{\sigma_0\gamma'}{\gamma_0} = \sigma_0 \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{\sqrt{1 - \beta'^2}} = \sigma_0 \frac{(1 - \beta\beta_0)\sqrt{1 - \beta_0^2}}{\sqrt{(1 - \beta\beta_0)^2 - (\beta - \beta_0)^2}} = \\ &= \sigma_0 \frac{(1 - \beta\beta_0)\sqrt{1 - \beta_0^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}\sqrt{1 - \beta_0^2}} = \gamma\sigma_0(1 - \beta\beta_0). \end{aligned} \quad (6.3)$$

In diesem System gilt folglich

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \gamma \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (1 - \beta\beta_0) = \gamma \left(\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \beta\beta_0\mu_0 c^2 \sigma_0 \right) = \gamma(E_y - \beta c B_z), \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} B'_z &= \mu_0 \sigma' v'_0 = \gamma \mu_0 \sigma_0 \frac{v_0 - v}{1 - \beta\beta_0} (1 - \beta\beta_0) = \gamma(\mu_0 \sigma_0 v_0 - v \mu_0 \sigma_0) = \\ &= \gamma \left(\mu_0 \sigma_0 v_0 - \frac{v}{\epsilon_0 c^2} \sigma_0 \right) = \gamma \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Die Gleichungen

$$E'_z = \gamma(E_z + \beta c B_y), \quad B'_y = \gamma(B_y + \frac{\beta}{c} E_z) \quad (6.6)$$

ergeben sich durch eine Umbenennung der Achsen y und z . Magnetisches und elektrisches Feld in Bewegungsrichtung dagegen ändern sich nicht,

$$E'_x = E_x, \quad B'_x = B_x. \quad (6.7)$$

Mit diesen Gleichungen haben wir das Transformationsverhalten zwischen elektrischem und magnetischem Feld entwickelt. Doch es fehlt noch so etwas wie die zeitliche Komponente.

6.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, daß ein elektrischer Strom über das von ihm erzeugte Magnetfeld auf einen zweiten Strom eine Kraft ausüben kann. Dies galt natürlich auch für eine bewegte Ladung. Was aber geschieht mit ruhenden Ladungsträgern, wenn sich das magnetische Feld zeitlich ändert? Dazu führen wir wieder eine Reihe von Versuchen durch.

6.1.1 Bewegter Magnet in einer Leiterschleife

In eine aus fünf Windungen bestehende Spule wird ein Stabmagnet eingeführt und wieder herausgezogen. Wir bemerken einen Spannungsstoß beim Einführen und Herausnehmen, also immer dann, wenn sich das Magnetfeld zeitlich ändert. Die Spannung, als *Induktionsspannung* U_{ind} bezeichnet, ist proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Feldes, $U_{\text{ind}} \sim dB/dt$.

6.1.2 Bewegte kleine Spule im magnetischen Feld

Eine *Helmholtzspule* (benannt nach dem deutschen Naturforscher Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821–1894) besteht aus zwei gleichgroßen kreisförmigen und parallelstehenden Spulen, deren Abstand gleich ihrem Radius R ist. Ist N die Anzahl der Windungen in jeder der Spulen, so ergibt sich in der Mitte zwischen den Spulen die magnetische Feldstärke

$$B = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{N\mu_0 I}{R}. \quad (6.8)$$

entlang der Symmetrieachse. In diese Mitte hängen wir nun eine kleine Spule und drehen diese um eine Achse, die senkrecht zum Feld steht. Je schneller wir drehen, desto höher wird die Amplitude der Induktionsspannung. Eine Verdopplung der magnetischen Feldstärke führt zur Verdopplung des Effektes. Die Induktionsspannung verschwindet in dem Moment, in dem der magnetische Feldvektor in die Ebene der kleinen Spule fällt. Daraus lesen wir ab, daß die Induktionsspannung proportional zum Skalarprodukt aus zeitlicher Änderung der Fläche und magnetischer Feldstärke ist, $U_{\text{ind}} \sim \vec{B} \cdot d\vec{a}/dt$.

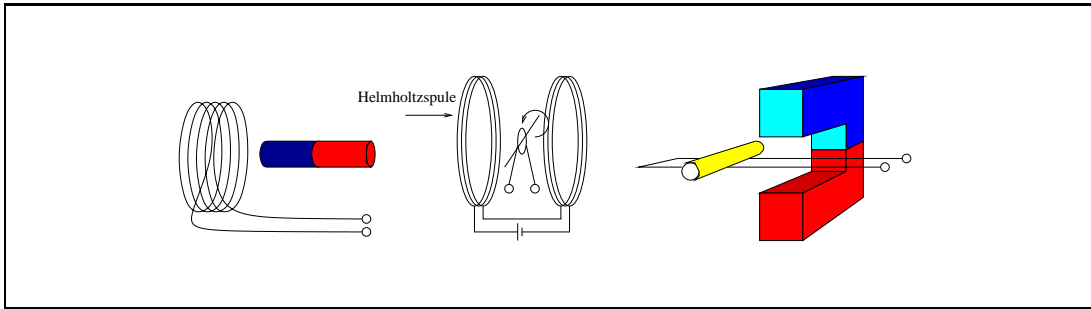


Abb. 6.2 Experimente zur Induktion

Aus beiden Experimenten folgern wir, daß die Induktionsspannung proportional zum magnetischen Fluß sein muß, $U_{\text{ind}} \sim \Phi_M$.

6.1.3 Berechnung der Induktion

Zur genauen Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Induktionsspannung und zeitlicher Änderung des magnetischen Flusses gehen wir erneut den umgekehrten Weg und bewegen eine rechteckige Leiterschleife in einem Magnetfeld, das senkrecht zur Fläche der Schleife steht und senkrecht zur Bewegung der Schleife homogen ist, in Bewegungsrichtung jedoch stetig abnimmt. Ein solches Feld steht als Außenfeld einer endlichen Spule in deren Symmetrieebene in mittlerer Entfernung zur Verfügung. Die Geschwindigkeit sei jedoch diesmal nicht relativistisch.

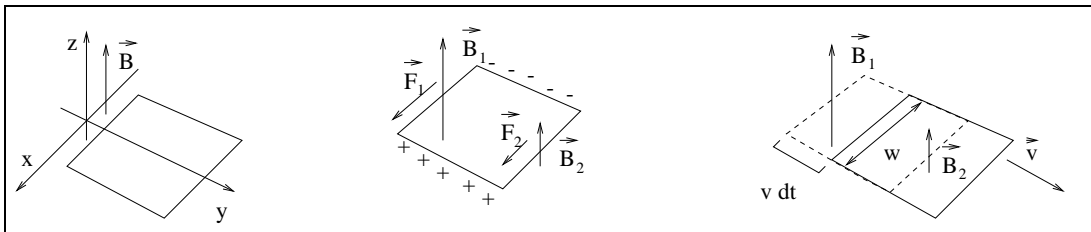


Abb. 6.3 Gedankenexperiment zur Induktion

Auf jeder der zur Bewegungsrichtung senkrechten Kanten der Schleife wirkt aufgrund der Bewegung eine Lorentzkraft. Da jedoch die magnetische Feldstärke „hinten“ (B_1) größer ist als „vorne“ (B_2), verschwindet die Arbeit entlang des Gesamtumlaufs nicht. Stattdessen ergibt sich mit der Breite w der Schleife

$$U_{\text{ind}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{q} \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{q} (F_1 w - F_2 w) = v w (B_1 - B_2). \quad (6.9)$$

Zur gleichen Zeit verliert die Schleife magnetischen Fluß, denn sie bewegt sich in der Zeit Δt um die Strecke $v \Delta t$ voran, gewinnt die Fläche $w v \Delta t$ „vorne“ hinzu, verliert sie aber „hinten“ wieder. Damit ist die Änderung des Flusses

$$\Delta \Phi_M = B_2 w v \Delta t - B_1 w v \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta \Phi_M}{\Delta t} = v w (B_2 - B_1). \quad (6.10)$$

Der Vergleich beider Formeln liefert schließlich

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_M}{dt} \quad \text{oder} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{a}. \quad (6.11)$$

6.2 Die Lenzsche Regel

Eine Spule wird aufrecht stehend von einem zeitlich konstanten Strom durchflossen und erzeugt damit ein Magnetfeld. Es ist etwas schwierig, einen Metallring dicht über dieser Spule fallen zu lassen. Ist es aber einmal gelungen, so schwebt dieser Ring frei in der Luft. Gleichzeitig messen wir eine deutliche Erwärmung, die auf einen Stromfluß durch diesen Ring schließen läßt. Was ist geschehen? Die Fallbewegung durch das inhomogene Endfeld der Spule hat im Ring eine Induktionsspannung induziert, die zu einem Strom führte. Auf diesen wirkt eine Lorentzkraft, die den Ring im Mittel nach oben zieht und somit die Fallbewegung bremst. Gleichzeitig erzeugt der Strom ein magnetisches Feld, das dem Randfeld entgegengerichtet ist. Der beobachtete Effekt bestätigt eine Regel, die in ihrer vollen Form lautet:

Der von einem magnetischen Feld induzierte Strom fließt so, daß er seiner Ursache entgegenwirkt. (Lenzsche Regel)

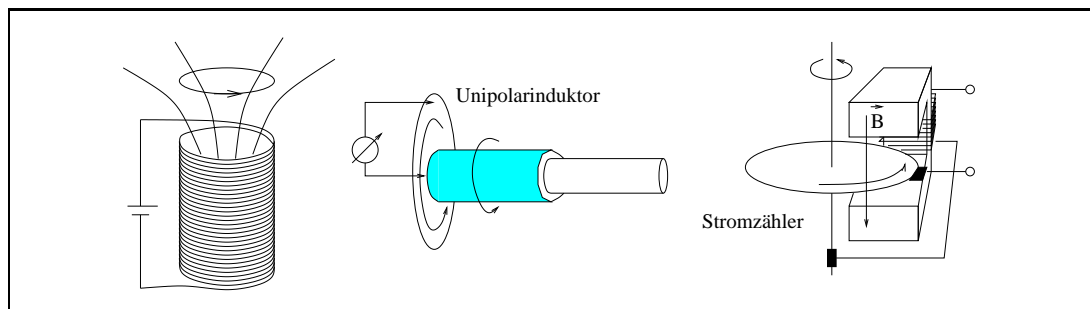


Abb. 6.4 Experimente und Apparaturen zur Lenzschen Regel

Ein *Unipolarinduktor* besteht aus einer rotierenden Metallscheibe, an die wahlweise ein Messingrohr angeschlossen werden kann, und einem runden Stabmagneten, der halb in das Messingrohr hineinragt. Mit und ohne Rohr messen wir zwischen Zentrum der Scheibe und ihrer Peripherie eine Induktionsspannung. Diese ist eine Folge der Lorentzkraft, mit der das Polfeld des Magneten die rotierenden Ladungsträger der Scheibe nach außen zieht. Aber auch längs der Messingröhre kann eine Spannung gemessen werden, denn das Polfeld durchdringt den Mantel der Röhre. Drehen wir dagegen nur den Magneten und lassen die anderen Teile in Ruhe, so ist keine Induktionsspannung zu messen.

Auf ähnliche Weise funktioniert der Strom- oder genauer Energiezähler in unseren Haushalten. Eine Metallscheibe ist drehbar um ihre Symmetrieachse gelagert und wird zugleich eingefasst von einem Elektromagneten, dessen Magnetfeld senkrecht zur Scheibe steht. Fließt nun ein Strom durch die Achse in die Mitte der Scheibe und dann nach außen zu einem Abnehmer, so wirkt auf diesen Strom durch das Magnetfeld eine Lorentzkraft, die sich auf die Scheibe überträgt und diese in Drehbewegung versetzt. Wird dieser Strom zugleich durch den Elektromagneten geschickt, so kann damit die verbrauchte elektrische Arbeit auch für Wechselströme gemessen werden. Die Apparatur findet aber nicht nur als Antrieb, sondern auch als Bremse Verwendung. Wir sprechen dann von *Induktionsbremsen* (z.B. in U-Bahnen).

6.3 Die Gegeninduktion

Wir haben erkannt, daß die Änderung der Stromstärke, die durch eine Spule fließt, in einem benachbarten Stromkreis eine Induktionsspannung und damit ihrerseits einen Stromfluß hervorruft. Dieser Effekt wird im *Transformator* verwendet. Durch einen Weicheisenkern geleitet kann dabei das Magnetfeld, das die *Primärspule* erzeugt, beinahe ohne Verluste zur *Sekundärspule* gelangen. Die Spannungen auf Primär- und Sekundärseite verhalten sich direkt proportional zu den Windungszahlen der Spulen. Auch ein Transformator mit gleichen Windungszahlen hat seinen Sinn: Er vermag als *Trenntransformator* Potentialdifferenzen zwischen zwei Stromkreisen zu überbrücken.

6.3.1 Ein Beispiel für die Gegeninduktion

Als Rechenbeispiel soll eine kreisförmige Feldspule des Radius R_1 betrachtet werden, in deren Mitte in gleicher Ebene eine kleine kreisförmige Induktionsspule des Radius R_2 liegt. Bei angelegtem Wechselstrom soll die induzierte Spannung gemessen werden. Dabei haben wir das Magnetfeld in der Mitte der Spule bereits berechnet. Es ist in Gleichung (5.37) für den Spezialfall $z = 0$ gegeben als

$$B_1 = \frac{N_1 \mu_0 I_1}{2R_1}. \quad (6.12)$$

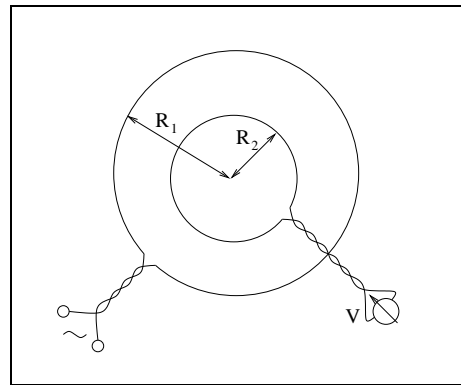


Abb. 6.5 Experiment zur Gegeninduktion

Aus ihm berechnet sich der magnetische Fluß durch die kleine Fläche als

$$\Phi_{21} = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 = \frac{N_1 \mu_0 I_1}{2R_1} N_2 \pi R_2^2 = N_1 N_2 \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} I_1 =: L_{21} I_1, \quad (6.13)$$

die Induktionsspannung ist also

$$U_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (6.14)$$

L_{21} ist die *Gegeninduktivität* der Anordnung. Ihre Einheit ist nach dem amerikanischen Physiker Joseph Henry (1797–1878) benannt, $1H = 1kgm^2/C^2$. Gebräuchlich sind die Einheiten $1\mu H = 10^{-6}H$ und $1nH = 10^{-9}H$.

6.3.2 Symmetrie der Gegeninduktion

Die Induktion der Spule 1 auf die Spule 2 ist dieselbe wie umgekehrt. Um dies zu sehen, berechnen wir beide magnetischen Flüsse. Es ist

$$\Phi_M = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{a} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}. \quad (6.14)$$

Für

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_1 dV}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \quad (6.15)$$

ergibt sich

$$\Phi_{21} = \oint_{C_2} \vec{A}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{r}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}. \quad (6.16)$$

Da die beiden Integrationen vertauschen und das Doppelintegral symmetrisch in den Indizes ist, gilt in der Tat $L_{21} = \Phi_{21}/I_1 = \Phi_{12}/I_2 = L_{12}$.

6.4 Die Selbstinduktion

Es ist naheliegend, daß ein zeitlich veränderlicher Strom auch sich selbst beeinflusst. Die Gleichung (6.14) und ihre entsprechend umgekehrte Gleichung lassen sich erweitern zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} U_1 &= -L_{11} \frac{dI_1}{dt} - L_{12} \frac{dI_2}{dt} \\ U_2 &= -L_{21} \frac{dI_1}{dt} - L_{22} \frac{dI_2}{dt}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Die hinzugefügten Elemente $L_1 := L_{11}$ und $L_2 := L_{22}$ werden als (*Selbst-*) *Induktivitäten* bezeichnet. Die *Vierpoltheorie*, die eine Apparatur wie den Transformator in einen „schwarzen Kasten“ legt und nur die Reaktionen der Schaltung auf Stromänderungen zwischen den vier Polen betrachtet, beschreibt das System (6.17) als die Verbindung zwischen einem Stromänderungsvektor und einem Spannungsvektor über eine Induktivitätsmatrix.

6.4.1 Ein Beispiel für die Selbstinduktion

Berechnet werden soll die Induktivität einer *Toroidspule*, also einer Spule, deren Eisenkern die Form eines Hohlzylinders mit nicht zu vernachlässigender Wanddicke hat. Die Höhe dieser Spule sei h , der Innenradius a und der Außenradius b . Legen wir einen geschlossenen Weg des Radius r ($a < r < b$) ins Innere des Eisenkerns auf gleicher Höhe, so gilt nach dem Ampèreschen Satz

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B = N \mu_0 I = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{a} \quad (6.18)$$

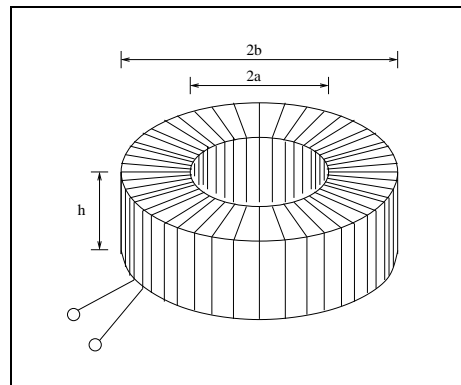


Abb. 6.6 Aufbau einer Toroidspule

und damit

$$\Phi_M = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = N \int_0^h \int_a^b \frac{N \mu_0 I}{2\pi r} dr dz = N^2 \frac{\mu_0 I}{2\pi} h \ln \left(\frac{b}{a} \right). \quad (6.19)$$

Die Induktivität ist damit gegeben als

$$L = \frac{\Phi_M}{I} = N^2 \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right). \quad (6.20)$$

Für $N = 10^3$ Windungen, $h = 20\text{cm}$, $b = 10\text{cm}$ und $a = 5\text{cm}$ erhalten wir $L = 27.7\text{mH}$.

6.5 Schaltungen mit Induktivitäten

Spulen und andere Induktivitäten können wie normale Schaltelemente in eine elektrische Schaltung eingebaut werden. Ähnlich wie ein Kondensator speichern sie *Energie* in Form des magnetischen Feldes. Sie berechnet sich als die Arbeit, die gegen die induzierte Spannung aufgewandt werden muß. So ist

$$dW = -U_{\text{ind}}dq = L \frac{dI}{dt} dq = L \frac{dq}{dt} dI = LI dI \quad (6.21)$$

und damit

$$W = \int_0^I LI' dI' = \frac{1}{2}LI^2. \quad (6.22)$$

6.5.1 Schaltungen aus Spule und Widerstand

In einem ersten Schritt soll eine mit einem Widerstand in Reihe geschaltete Spule an eine konstante Spannungsquelle angeschlossen sein. Mathematisch drückt sich das durch die Maschenregel

$$U_0 = RI + L\dot{I} \quad \text{mit der Anfangsbedingung } I(t_0) = 0 \quad (6.23)$$

aus. Diese inhomogene Differentialgleichung hat die Lösung

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}(t - t_0)\right) \right). \quad (6.24)$$

Wir erkennen, daß mit dem Erreichen der Sättigung der Widerstand der Spule auf Null zurückgeht. Ist diese Sättigung erreicht, so schalten wir die Anordnung kurz. Nun ist die zugehörige homogene Differentialgleichung $RI + L\dot{I} = 0$ zu lösen, diesmal mit der Anfangsbedingung $I(t_1) = U_0/R$. Die Lösung ist dann

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{R}{L}(t - t_1)\right). \quad (6.25)$$

Schalten wir die Anordnung nicht kurz, sondern unterbrechen vielmehr den Stromkreis, so kommt es zum Funkenüberschlag. Da der Strom nahezu augenblicklich vom Wert U_0/R auf Null fällt, ist die induzierte Spannung entsprechend hoch.

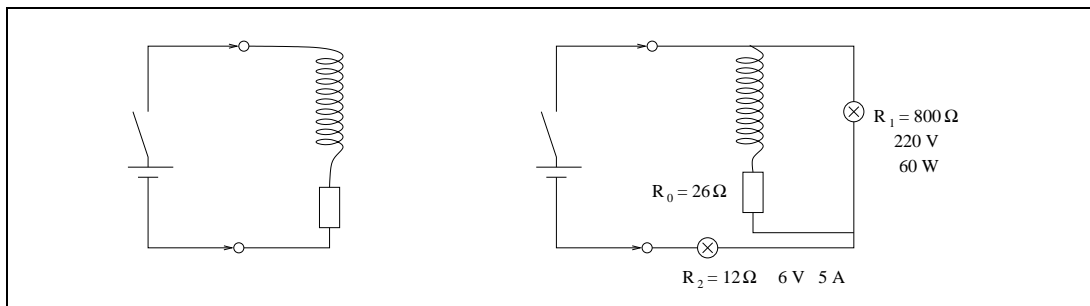


Abb. 6.7 Schaltungen aus Spule und Widerstand

Wir können die Spannungsverhältnisse aber auch sichtbar machen, wenn wir den Widerstand durch eine Glühbirne ersetzen und außerdem eine andere mit hohem Widerstand zur Spule parallel schalten. Wir beobachten, wie beim Ladevorgang die in Serie geschaltete Glühbirne langsam heller wird, während die parallelgeschaltete verlischt. Bei Unterbrechung des Stromkreises leuchtet dagegen die parallelgeschaltete hell auf.

6.5.2 Schaltungen aus Spule und Kondensator

Spule und Kondensator können beide Energie speichern, doch jeder auf seine Art: Der Kondensator durch ruhende, die Spule durch bewegte Ladungen. Somit ist es naheliegend, daß in einem Stromkreis, der nur aus Spule und Kondensator besteht, diese Energie ständig zwischen beiden Schaltelementen ausgetauscht wird. Dabei ist die Energiesumme konstant,

$$W = \frac{1}{2}LI^2(t) + \frac{1}{2}\frac{Q^2(t)}{C} = \frac{1}{2}CU_0^2$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{dW}{dt} = LI\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} = L\frac{dQ}{dt}\left(\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q\right). \quad (6.25)$$

Diese Differentialgleichung für $Q(t)$ läßt sich auch aus der Maschenregel erhalten. Als Anfangsbedingung wählen wir den voll aufgeladenen Kondensator, $Q(0) = Q_0 = CU_0$, $\dot{Q}(0) = 0$. Es ergibt sich die Lösung

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (6.26)$$

6.5.3 Schaltungen aus Spule, Kondensator und Widerstand

Für eine Ringschaltung aus Spule, Kondensator und Widerstand ergibt die Maschenregel

$$L\frac{dI}{dt} + RI - \frac{Q}{C} = 0 \quad (6.27)$$

oder

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC}Q = 0. \quad (6.28)$$

Mit dem Ansatz $Q = Ae^{\lambda t}$ ergibt sich die charakteristische oder Eigenwertgleichung $\lambda^2 + R\lambda/L + 1/LC = 0$ mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{R}{2L} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (6.29)$$

Je nach dem Vorzeichen des Radikanden unterscheiden wir drei Fälle:

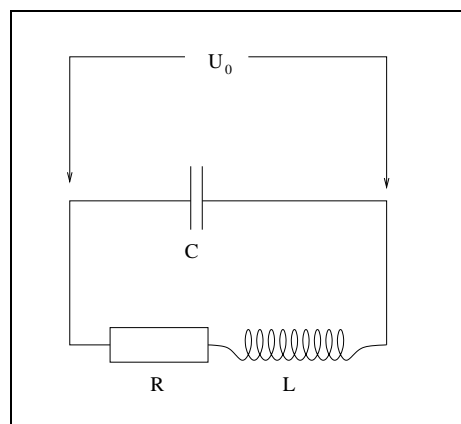


Abb. 6.8 Gedämpfter Schwingkreis

Im *Schwingfall* $\omega_0^2 > \gamma^2$ werden die Eigenwerte komplex, es ergibt sich

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} =: -\gamma \pm i\omega \tag{6.30}$$

und somit als allgemeine Lösung

$$Q(t) = e^{-\gamma t}(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}). \tag{6.31}$$

c_1 und c_2 sind ebenfalls i.a. komplex. Sind jedoch Anfangsbedingungen vorgegeben, so führen diese trotz des komplexen Ansatzes zu einer reellen Lösung. Mit $Q(0) = Q_0 = CU_0$ und $\dot{Q}(0) = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= Q_0, & -\gamma(c_1 + c_2) + i\omega(c_1 - c_2) &= 0 \quad \Rightarrow \\ c_1 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{i\omega}\right) Q_0, & c_2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\gamma}{i\omega}\right) Q_0 \end{aligned} \tag{6.32}$$

und damit wegen $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t} \left(\cos \omega t + \frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t \right). \tag{6.33}$$

Für den *aperiodischen Grenzfall* $\omega_0^2 = \gamma^2$ fallen die beiden Eigenwerte zusammen. Dann ist die Lösung gegeben als $Q(t) = e^{-\gamma t}(c_1 t + c_2)$ und speziell für die bereits verwendete Anfangsbedingung

$$Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t}(\gamma t + 1). \tag{6.34}$$

Der *Kriechfall* $\omega_0^2 < \gamma^2$ schließlich liefert

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm \omega' \quad \Rightarrow \quad Q(t) = e^{-\gamma t}(c_1 e^{\omega' t} + c_2 e^{-\omega' t}) \tag{6.35}$$

und mit derselben Anfangsbedingung

$$Q(t) = \frac{Q_0}{2\omega'} e^{-\gamma t} \left((\omega' + \gamma)e^{\omega' t} + (\omega' - \gamma)e^{-\omega' t} \right). \tag{6.36}$$

Wir erkennen einen langsam abklingenden ersten und einen schnell abklingenden zweiten Term. Insgesamt kommt es zu keiner Schwingung.

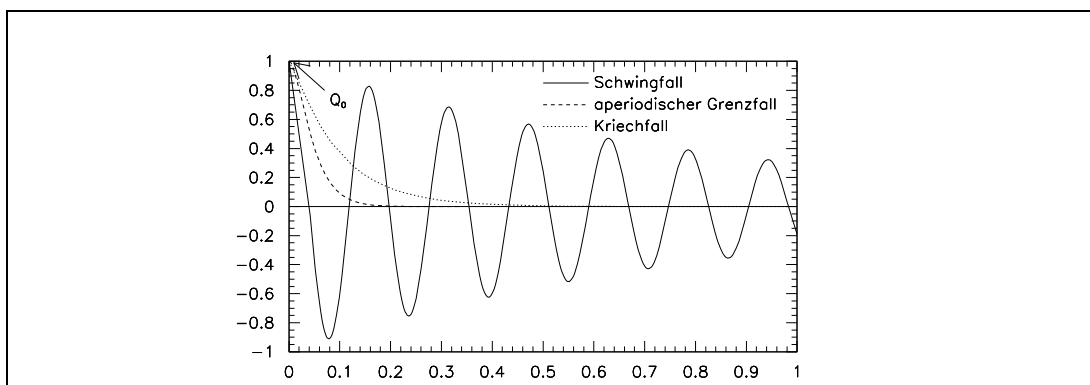


Abb. 6.9 Lösungen des gedämpften Schwingkreises

6.6 Wechselströme

In einen gedämpften Schwingkreis des letzten Abschnitts sei als antreibende Kraft eine *Wechselspannungsquelle* eingefügt, also ein Schaltelement, dessen zeitlicher Spannungsverlauf sich mit Hilfe einer trigonometrische Funktion beschreiben läßt. Eine Möglichkeit, die Reihenschaltung von Kondensator, Widerstand und Spule mit dieser Wechselspannungsquelle mathematisch zu fassen, besteht in der Maschengleichung

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = U_0 \cos(\omega t) = U_E(t), \quad (6.37)$$

wobei ω die Kreisfrequenz der Wechselspannung und U_0 ihre Amplitude ist. Im *eingeschwungenen Zustand*, also in einem Zustand, in dem die Anfangsbedingungen keine Rolle mehr spielen, lassen sich bereits an dieser Stelle einige Feststellungen machen. So wird der Strom, der durch den Schaltkreis fließt, dieselbe Frequenz wie die Spannung haben und gegen diese lediglich um eine *Phase* ϕ zeitlich verschoben sein. Der Ansatz

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (6.38)$$

ist so allgemein gehalten, daß er (bzw. die durch Integration berechenbare Ladung $Q(t)$ auf den Kondensatorplatten) die Gleichung (6.37) löst. Um einfacher rechnen zu können, soll jedoch ein komplexer Ansatz gewählt werden,

$$\tilde{U}_E(t) = U_0 \exp(i\omega t), \quad \tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 \exp(i\omega t), \quad (6.39)$$

wobei \tilde{I}_0 als allgemein komplex angenommen wird, also auch die Phase ϕ enthält. Dabei kann wie bereits vorher darauf vertraut werden, daß dieser komplexe Ansatz den physikalischen Sachverhalt richtig beschreibt, denn die physikalischen Randwerte, hier beispielsweise als Anfangsbedingung gegeben, würden diese komplexen Funktionen dann wieder in den Raum der reellen Funktionen zurückholen. Wie im folgenden zu zeigen sein wird, können von diesem Ansatz ausgehend, Spule, Kondensator und Widerstand im eingeschwungenen Zustand als normale Schaltelemente betrachtet werden, die einem verallgemeinerten Ohmschen Gesetz gehorchen.

6.6.1 Komplexe Widerstände

Zunächst seien Widerstand, Spule und Kondensator jeweils einzeln an die Wechselspannungsquelle angeschlossen. Für den Widerstand gilt

$$\tilde{U}_R(t) = U_0 \exp(i\omega t) = R\tilde{I}_0 \exp(i\omega t) = R\tilde{I}(t), \quad (6.40)$$

es ist also wie bisher $U_0 = RI_0$, der Widerstand ist der konventionelle Ohmsche Widerstand R . Das ändert sich für die Spule. Hier ergibt sich

$$\tilde{U}_L(t) = U_0 \exp(i\omega t) = i\omega L\tilde{I}_0 \exp(i\omega t) = L \frac{d\tilde{I}(t)}{dt} \quad (6.41)$$

und damit der Widerstand $\tilde{R}_L = i\omega L$. Für den Kondensator schließlich ist

$$\tilde{U}_C(t) = U_0 \exp(i\omega t) = \frac{\tilde{I}_0}{i\omega C} \exp(i\omega t) = \frac{1}{C} \int \tilde{I}(t) dt \quad (6.42)$$

und als Widerstand $\tilde{R}_C = (i\omega C)^{-1}$. Der Ohmsche Widerstand $Z_W := R$ wird auch als *Wirkwiderstand*, die Summe $Z_B := R_C + R_L$ als *Blindwiderstand* bezeichnet.

6.6.2 Erzwungene Schwingung

Das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz

$$\tilde{U}(t) = \tilde{R}\tilde{I}(t) \quad \text{mit} \quad \tilde{R}_R := R, \quad \tilde{R}_L := i\omega L \quad \text{und} \quad \tilde{R}_C := \frac{1}{i\omega C} \quad (6.43)$$

verwandelt Gleichung (6.37) in eine algebraische Gleichung,

$$\tilde{U}_E(t) = \tilde{U}_R(t) + \tilde{U}_L(t) + \tilde{U}_C(t) = R\tilde{I}(t) + i\omega L\tilde{I}(t) + \frac{1}{i\omega C}\tilde{I}(t). \quad (6.44)$$

Der Ersatzwiderstand ist wie bei einer Reihenschaltung von Ohmschen Widerständen auch hier als Summe der Widerstände gegeben,

$$\tilde{R} = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (6.45)$$

und mit $\gamma = R/2L$ ist

$$\begin{aligned} \tilde{I}_0 &= I_0 \exp(i\phi) = \frac{U_0}{\tilde{R}} = \frac{\omega U_0}{L(2\gamma\omega + i(\omega^2 - \omega_0^2))} = \\ &= \frac{\omega U_0(2\gamma\omega - i(\omega^2 - \omega_0^2))}{L(4\gamma^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2)}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Als reelle Parameter ergeben sich

$$I_0 = \frac{\omega U_0}{L\sqrt{4\gamma^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \quad \text{und} \quad \tan \phi = -\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega}. \quad (6.47)$$

Für die ungedämpfte erzwungene Schwingung ($\gamma = 0$) erkennen wir für $\omega = \omega_0$ ein singuläres Verhalten, die *Resonanzkatastrophe*. Der ohmsche Widerstand, der stets in einer Schaltung vorhanden ist, dämpft dieses Verhalten auf endliche Werte herab. Gleichzeitig verschieben sich die Resonanzpunkte für die drei Schaltelemente. Wir wollen daher zunächst die Amplituden der Spannungen an Widerstand, Kondensator und Spule bestimmen.

6.6.3 Resonanzverhalten

Für die Amplitude der Spannung an Widerstand, Kondensator und Spule ist

$$U_{R0}(\omega) = RI_0 = \frac{2\gamma\omega U_0}{\sqrt{4\gamma^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}, \quad (6.48)$$

$$U_{C0}(\omega) = \frac{I_0}{\omega C} = \frac{\omega_0^2 U_0}{\sqrt{4\gamma^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}, \quad (6.49)$$

$$U_{L0}(\omega) = \omega LI_0 = \frac{\omega^2 U_0}{\sqrt{4\gamma^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}. \quad (6.50)$$

Die entsprechenden *Resonanzfrequenzen* ω_R , ω_C und ω_L , also die Kreisfrequenzen maximaler Spannung, ergeben sich als Extremwerte dieser Funktionen,

$$\omega_R^2 = \omega_0^2, \quad \omega_C^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \quad \text{und} \quad \omega_L^2 = \frac{\omega_0^4}{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \quad (6.51)$$

Ferner ist

$$U_{R0}(\omega_R) = U_0, \quad U_{C0}(\omega_C) = U_{L0}(\omega_L) = \frac{\omega_0^2 U_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad (6.52)$$

sowie

$$\begin{aligned} U_{R0}(\omega \rightarrow 0) &= U_{L0}(\omega \rightarrow 0) = U_{R0}(\omega \rightarrow \infty) = U_{C0}(\omega \rightarrow \infty) = 0, \\ U_{C0}(\omega \rightarrow 0) &= U_{L0}(\omega \rightarrow \infty) = U_0. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Die so grob umzeichneten Spannungsverläufe sind in Abbildung 6.10 dargestellt.

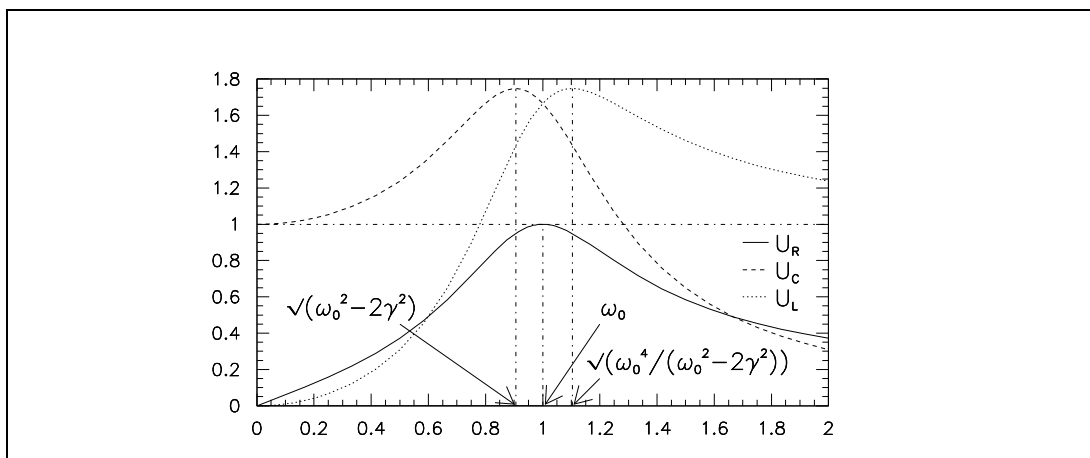


Abb. 6.10 Resonanzkurven der Spannung an Widerstand, Kondensator und Spule

6.6.4 Hoch- und Tiefpaß

Im gedämpften Schwingkreis verschieben sich die Resonanzpunkte der einzelnen Bauelemente von der Resonanzfrequenz ω_0 des ungedämpften Schwingkreises weg. Am Kondensator fällt bei relativ niedrigen, an der Spule bei relativ hohen Frequenzen die größte Spannung ab. Das macht man sich in der Hochfrequenztechnik zunutze, um ein breites Frequenzspektrum in die einzelnen Frequenzbereiche aufzuspalten. Man spricht hier von *Hoch-* bzw. *Tiefpässen*. Dabei kann jeweils auf Spule bzw. Kondensator verzichtet werden.

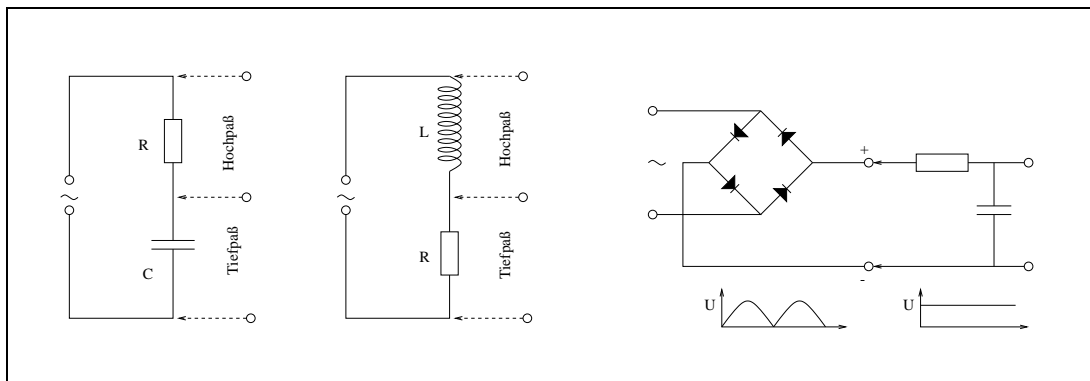


Abb. 6.11 Hochpaß, Tiefpaß und stabilisierter Gleichrichter

In der Schaltung in Abbildung 6.11 links stellt der Kondensator den Tief- und der Widerstand den Hochpaß dar. An letzterem fällt eine Spannungsamplitude

$$U_{R0} = \frac{RU_0}{R + (i\omega C)^{-1}} = \frac{\omega RCU_0 e^{i\phi}}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}} \quad (6.54)$$

und damit eine Spannung

$$U_R(t) = \frac{\omega RCU_0 \cos(\omega t + \phi)}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}} \quad \text{mit} \quad \tan \phi = \frac{1}{\omega RC} \quad (6.55)$$

ab. Für die mittlere Schaltung ist der Hochpaß durch die Spule gegeben. Ihre Spannungsamplitude ist

$$U_{L0} = \frac{i\omega LU_0}{R + i\omega L} = \frac{\omega LU_0 e^{i\phi}}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}, \quad (6.56)$$

Die Spannung also

$$U_L(t) = \frac{\omega LU_0 \cos(\omega t + \phi)}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \quad \text{mit} \quad \tan \phi = \frac{R}{\omega L}. \quad (6.57)$$

In beiden Fällen erkennt man, daß für hohe Frequenzen fast die gesamte Spannung am Hochpaß abfällt, während die Phase sich dem Wert $\phi = 0^\circ$ nähert. Anders beim ungedämpften erzwungenen Schwingkreis, bei dem der Widerstand fehlt. Für die Spannung an der Spule gilt hier

$$U_{L0} = \frac{i\omega LU_0}{i\omega L + (i\omega C)^{-1}} = \frac{\omega^2 U_0}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (6.58)$$

Die Phase verändert sich hier nicht, lediglich in einem Schritt um den Wert π beim Überschreiten der Resonanzstelle $\omega = \omega_0$. Diese Schaltung eignet sich nicht zur Frequenzteilung. Eine einfache Anwendung des RC-Schaltkreises ist hingegen die Stabilisierung eines durch einen Gleichrichter geschickten Wechselstroms. Die stabilisierte Spannung wird dabei am Kondensator abgegriffen, die Schaltung ist in Abbildung 6.11 ganz rechts dargestellt.

6.7 Leistung des elektrischen Stroms

Die Arbeit, die eine Spannung U auf die Ladungsmenge ΔQ ausübt, ist als $\Delta W = U \Delta Q$ gegeben. Im elektrischen Stromkreis ist diese Ladungsmenge der pro Zeiteinheit fließende Strom. Damit ergibt für diese Arbeit

$$W(T) = \int_0^T U(t)I(t)dt. \quad (6.59)$$

Für eine Gleichspannung, also zeitlich konstante Spannung und Stromstärke, läßt sich dieses leicht integrieren und liefert, dividiert man durch die Zeit T , die *Leistung*

$$P = UI = RI^2. \quad (6.60)$$

Für eine Wechselspannung dagegen gibt man eine *mittlere Leistung* an,

$$\bar{P} := \frac{1}{T} \int_0^T U(t)I(t)dt \quad \text{mit} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (6.61)$$

(hier darf wegen $Re(\tilde{U}\tilde{I}) \neq Re(\tilde{U})Re(\tilde{I})$ nicht komplex gerechnet werden). Fällt die Spannung am Widerstand ab, so ist die Spannung $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ ($U_0 = RI_0$) mit der Stromstärke $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ in Phase und damit

$$\bar{P} = \frac{U_0 I_0}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{U_0 I_0}{2} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \quad (6.62)$$

mit den effektiven Größen $U_{\text{eff}} = U_0/\sqrt{2}$ und $I_{\text{eff}} = I_0/\sqrt{2}$. Fällt die Spannung an einer Spule ab, so gilt dagegen $U(t) = -U_0 \sin(\omega t)$ ($U_0 = \omega LI_0$) und damit

$$\bar{P} = -\frac{U_0 I_0}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt = 0, \quad (6.63)$$

dasselbe auch für die mittlere Leistung an einem Kondensator. Im allgemeinen Fall $U(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$ ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{U_0 I_0}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t) dt = \\ &= \frac{U_0 I_0}{T} \int_0^T (\cos^2(\omega t) \cos \phi - \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin \phi) dt = \\ &= \frac{U_0 I_0}{2} \cos \phi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \frac{Z_W}{\sqrt{Z_W^2 + Z_B^2}}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

7. Magnetfelder in Materie

Bringt man verschiedene Probekörper in die Nähe von Spulen, so wirken auf sie ganz unterschiedliche Kräfte. Die größte Kraft wirkt am Spulenende und nicht in ihrem Zentrum. Entscheidend für die Wirkung des Magnetfeldes auf den Probekörper ist also die räumliche Änderung, nicht die absolute Größe. Einige Substanzen werden immer in Richtung zunehmender Feldintensität, andere in Richtung abnehmender Intensität gezogen. Wir unterscheiden

diamagnetische Substanzen:

Substanzen, die vom Magnetfeld schwach abgestoßen werden
(H_2O , Cu , Pb , $NaCl$, SiO_2 , S , C , N_2 , ...)

paramagnetische Substanzen:

Substanzen, die vom Magnetfeld schwach angezogen werden
(Na , Al , $CuCl_2$, $NiSO_4$, O_2 , ...)

ferromagnetische Substanzen:

Substanzen, die vom Magneten stark angezogen werden
(Fe , Fe_3O_4 , Co , Ni , ...)

Dieses verschiedene Verhalten läßt sich durch das Modell kleiner *Elementarmagnete* erklären, deren jeder als ein Kreisstrom gedacht werden kann. Dieses Modell besitzt auf den ersten Blick eine physikalische Untermauerung im mikroskopischen Maßstab. Das *Bohrsche Atommodell* geht davon aus, daß Elektronen den Kern umkreisen. Das elektrische Dipolfeld mittelt sich zeitlich heraus, aber es bleibt ein magnetisches Moment übrig. Da ein Elektron der Geschwindigkeit v in einer Sekunde $v/2\pi r$ Umläufe ausführt, resultiert daraus ein magnetisches Moment

$$p_M = \pi r^2 I = \pi r^2 \frac{dQ}{dt} = -\frac{evr}{2}. \quad (7.1)$$

Zugleich besitzt das Elektron den Bahndrehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$, zwischen beiden besteht also die Beziehung

$$\vec{p}_M = -\frac{e}{2m} \vec{L} \quad \left(-\frac{e}{2m} \text{ ist das } \textit{gyromagnetische Verhältnis}\right) \quad (7.2)$$

Während jedoch das gyromagnetische Verhältnis auch bei genauerer Betrachtung Bestand hat, ist der Rest des Modells fragwürdig. Erstens würde das elektrisch geladene Elektron auf seiner kreisförmigen Bahn seine Energie abstrahlen und so langsam in den Kern stürzen. Zweitens aber ist nicht klar, warum das Elektron gerade eine Kreisbahn und nicht beispielsweise eine Ellipsenbahn beschreiben soll. Jedoch ist das Modell für die hier anzustellenden Überlegungen durchaus ausreichend. Daher wollen wir hier zunächst die Kraftwirkung eines Magnetfeldes auf einen Kreisstrom betrachten.

7.1 Magnetische Kraftwirkung auf einen Dipol

Wir wollen die Kraft berechnen, die ein inhomogenes Feld auf einen Kreisstrom ausübt. Dazu betrachten wir den Sonderfall eines zylindersymmetrischen Feldes, dessen Achse zugleich die Symmetrieachse des Kreisstroms ist. Die Komponenten der Lorentzkraft

$$d\vec{F} = dq(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{7.3}$$

in der Ebene des Kreisstroms kompensieren sich, nicht jedoch diejenigen senkrecht dazu. Für die Gesamtkraft in diese Richtung berechnet sich

$$\begin{aligned} F_z &= \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{e}_z dq = \int (\vec{B} \times \vec{e}_z) \cdot \vec{v} dq = \\ &= - \int B_r Ids = -2\pi r B_r I = -2 \frac{p_M B_r}{r}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Die Komponente B_r verschwindet nur dann nicht, wenn die Magnetfeldlinien auseinanderweichen oder dichter zusammentreten. Damit hängt diese Komponente direkt mit der Veränderung des Magnetfeldes in z -Richtung zusammen. Der mathematische Zusammenhang ergibt sich aus dem Verschwinden der Divergenz des Magnetfeldes. Betrachten wir nämlich einen flachen Zylinder der Höhe Δz und der Querschnittsfläche πr^2 , so gilt für das Oberflächenintegral

$$0 = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} \approx -\pi r^2 B_z(x, y, z) + \pi r^2 B_z(r, \phi, z + \Delta z) + 2\pi r \Delta z B_r(r, \phi, z) \tag{7.5}$$

und damit im Grenzfall $\Delta z \rightarrow 0$

$$B_r(r, \phi, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(r, \phi, z)}{\partial z}. \tag{7.6}$$

Also ergibt sich $F_z = p_M \partial B_z / \partial z$, und im allgemeinen Fall erhalten wir wie beim elektrischen Dipol

$$\vec{F} = (\vec{p}_M \cdot \nabla) \vec{B}. \tag{7.7}$$

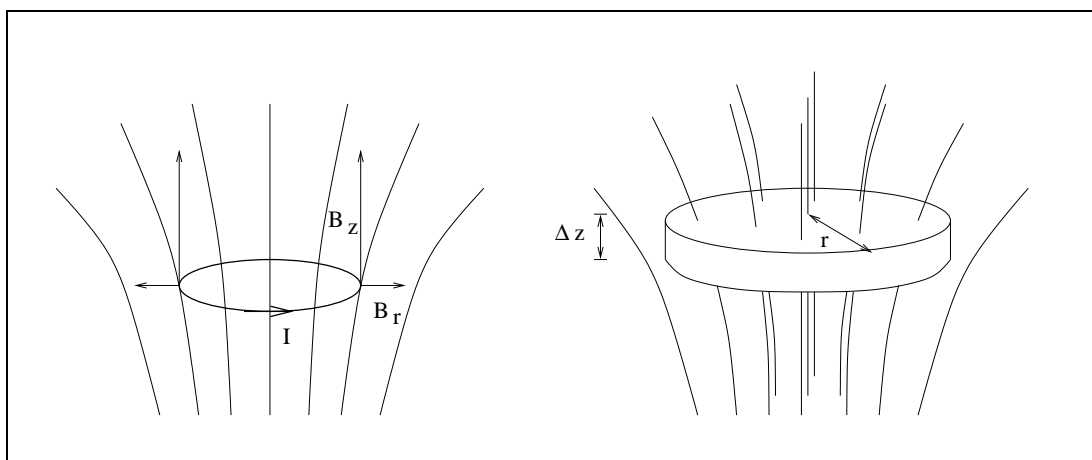


Abb. 7.1 Inhomogenes Magnetfeld und Kreisstrom

Nicht nur ein räumlich, sondern auch ein zeitlich veränderliches magnetisches Feld beeinflusst einen Kreisstrom. Doch führt es primär nicht zu einer Kraft auf den Kreisstrom, sondern zu einer Veränderung des magnetischen Moments. Nach dem Induktionsgesetz gilt nämlich

$$2\pi r E_\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB_z}{dt} \quad (7.8)$$

und damit

$$E_\phi = \frac{r}{2} \frac{dB_z}{dt}. \quad (7.9)$$

Die induzierte Spannung bewirkt eine Beschleunigung der Ladungsmenge q , deren Umlauf das magnetische Moment bestimmt. Es wirkt auf sie die Kraft

$$m \frac{dv}{dt} = qE_\phi = \frac{qr}{2} \frac{dB_z}{dt}. \quad (7.10)$$

Bringt man nun einen Kreisstrom vom feldfreien Raum in ein Magnetfeld der Stärke B , so führt dies zu einer Geschwindigkeitszunahme

$$\Delta v = \frac{qr}{2m} \Delta B = \frac{qr}{2m} B = r\omega_L \quad (7.11)$$

($\omega_L := qB/2m$ ist die *Lamorfrequenz*), wobei angenommen wird, daß der Radius r sich nicht ändert. Mit der Geschwindigkeitszunahme verkleinert sich aber auch das magnetische Moment des Kreisstroms um einen Betrag

$$\Delta \vec{p}_M = -\frac{q}{2} \Delta \vec{v} \times \vec{r} = -\frac{q^2 r^2}{4m} \vec{B}. \quad (7.12)$$

Schließlich kann auch ein räumlich homogenes und zeitlich konstantes Magnetfeld auf einen Kreisstrom einwirken. Ist die Achse des Kreisstroms gegen das Magnetfeld um einen Winkel α gekippt, so wirken auf die beiden Halbkreise jeweils entgegengesetzt gerichtete Lorentzkraftanteile

$$d\vec{F} = dq(\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{dq}{dt}(d\vec{r} \times \vec{B}) = I(d\vec{r} \times \vec{B}) \quad (7.13)$$

und damit Drehmomente

$$d\vec{N} = \vec{r} \times d\vec{F} = I(\vec{r} \cdot \vec{B})d\vec{r} - I\vec{B}(\vec{r} \cdot d\vec{r}) = I(\vec{r} \cdot \vec{B})d\vec{r}. \quad (7.14)$$

Die Integration über den gesamten Kreis ergibt dann schließlich

$$\vec{N} = \vec{p}_M \times \vec{B}. \quad (7.15)$$

Dieses Drehmoment dreht das Moment in Richtung des Magnetfeldes.

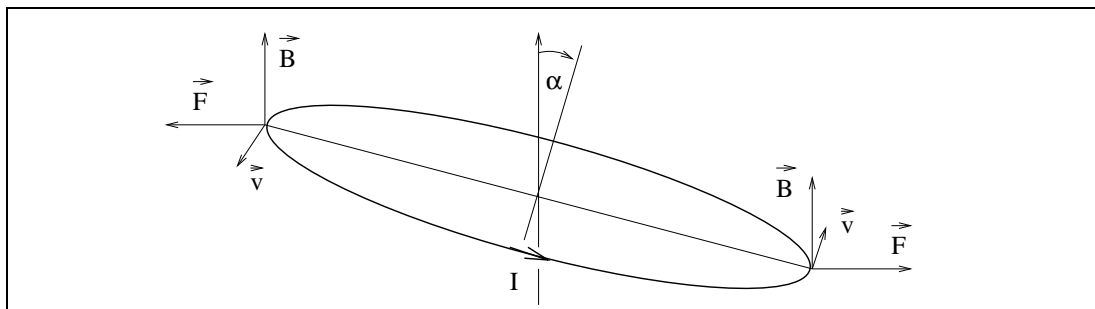


Abb. 7.2 Drehmoment auf einen Kreisstrom

7.2 Veranschaulichung der Materialeigenschaften

Die Betrachtungsweise, welche sich die Materie im Magnetfeld als eine Ansammlung kleiner magnetischer Elementarmagnete oder Kreisströme vorstellt, reicht aus, um die grundlegenden drei magnetischen Eigenschaften der Materie zu verstehen. Die Vorarbeit haben wir im letzten Abschnitt geleistet, als wir die Wirkung des magnetischen Feldes auf Kreisströme bestimmten. Diese kann nun verwendet werden, um die Wirkung des Feldes auf eine Ansammlung solcher Kreisströme zu veranschaulichen.

7.2.1 Diamagnetismus

In diamagnetischen Materialien kompensieren sich die magnetischen Momente der atomaren Kreisströme paarweise. Diamagnetismus tritt daher nur bei Substanzen mit einer geraden Anzahl von Elektronen in jedem Orbit auf. Beim Übergang vom feldfreien Raum ins Magnetfeld wird, so haben wir erkannt, ein Dipolmoment in Feldrichtung abgeschwächt, ein solches entgegengesetzt dazu verstärkt. Kompensierten sich also im feldfreien Raum die Magnetfelder von zwei atomaren Kreisströmen, so wird im Magnetfeld ein Dipolmoment resultieren, das entgegengesetzt zum Feld gerichtet ist. Es ist proportional zu \vec{B} und temperaturunabhängig.

7.2.2 Paramagnetismus

In Atomen mit einer ungeraden Anzahl von Elektronen in einem oder mehreren Orbits kompensieren sich die magnetischen Momente nicht. Es existiert also bereits im feldfreien Raum ein magnetisches Moment. Allerdings sind diese magnetischen Momente dort im Mittel ungerichtet. Wird ein magnetisches Feld angelegt, so bewirkt dieses ein Drehmoment auf die Dipole, welches diese parallel zum Feld ausrichtet. Die strenge Ausrichtung der Dipole wird immer wieder durch die thermische Bewegung der Atome zerstört. Der Paramagnetismus ist daher temperaturabhängig.

7.2.3 Ferromagnetismus

Im gewissen Sinne ist der Ferromagnetismus eine starke Form des Paramagnetismus. Sein wesentlicher Unterschied ist jedoch die Tatsache, daß die Ausrichtung der Momente auch dann noch andauert, wenn das magnetische Feld nicht mehr wirkt. Die Momente benachbarter Atome sind so stark miteinander korreliert, daß es energetisch günstiger ist, die Momente dieser benachbarten Atome parallel auszurichten, anstatt sie statistisch zu kompensieren. Erst oberhalb einer bestimmten Temperatur, der *Curie-Temperatur*, bricht diese kollektive Ausrichtung der Momente zusammen, das Material wird paramagnetisch. Diese Temperatur liegt für Eisen bei 770°C , für Nickel bei 358°C . Wir werden den Ferromagnetismus in einem späteren Kapitel noch einmal genauer unter die Lupe nehmen.

7.3 Magnetisierung und Magnetfeld

Wir haben mit Hilfe eines Modells vieler kleiner Kreisströme die magnetischen Eigenschaften der Materie interpretieren können. Makroskopisch äußert sich diese magnetischen Eigenschaften als *Magnetisierung* M oder *magnetische Dipolmomentendichte*, die als magnetisches Dipolmoment μ_M pro Volumen erklärt ist.

7.3.1 Homogen magnetisierte Materieschicht

Wir betrachten eine Schicht der Dicke Δz , die homogen in positive z -Richtung magnetisiert sei. Jede Säule der Querschnittsfläche Δa besitzt also dasselbe magnetische Moment $p_M = M\Delta a\Delta z$. Dieses kann durch einen Kreisstrom der Stärke I im das Flächenelement herum ersetzt werden, der das magnetische Moment $\vec{p}_M = I\Delta\vec{a}$ besitzt. Die Magnetisierung ist also durch die *Flächenstromdichte* J auf der Randfläche dieser Säule zu ersetzen,

$$M = \frac{I}{\Delta z} = J. \tag{7.16}$$

Wird die Schicht also in Säulen aufgeteilt, so kann die Magnetisierung jeweils durch eine Flächenstromdichte ersetzt werden. Auf benachbarten Flächen dieser Unterteilung heben sich jedoch diese Ströme wegen der konstanten Magnetisierung auf, so daß schließlich nur der Strom auf der Randfläche der Schicht übrig bleibt. Die magnetisierte Scheibe ist also einem gleichgeformten Volumen äquivalent, dessen Wand von der Flächenstromdichte $J = M$ durchflossen wird. Dieser Strom wird auch *gebundener Strom* genannt, da er an die Magnetisierung gebunden ist.

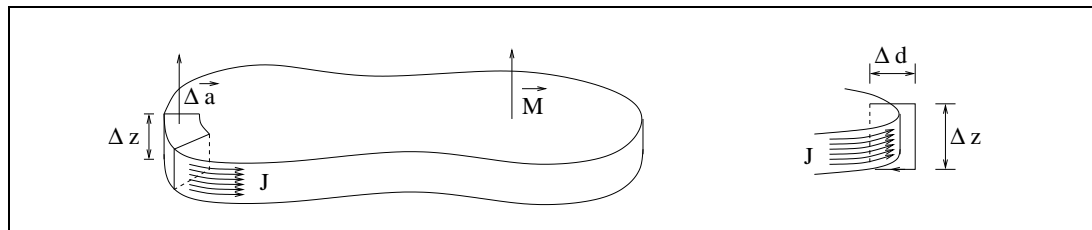


Abb. 7.3 Homogen magnetisierte Materieschicht

Wir legen nun in Gedanken einen flachen Weg der Ausmaße Δz und Δd um den Rand dieser Schicht. Der Strom, der die Magnetisierung ersetzt, fließt entsprechend der Rechte-Hand-Regel von der positiven z -Achse aus gesehen im Gegenuhrzeigersinn um die Schicht herum. Gleichermäßen nach dieser Regel umschließt der Weg den Strom auf der Randfläche der Schicht. Nach dem Ampèreschen Gesetz (5.23) gilt dann

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B_z^{\text{innen}} \Delta z - B_z^{\text{außen}} \Delta z = \mu_0 I$$

oder $B_z^{\text{innen}} = B_z^{\text{außen}} + \mu_0 M.$ (7.17)

Ist also ein von außen, beispielsweise durch Spulen erzeugtes Magnetfeld vorhanden, so wird dieses durch die magnetisierte Materie verändert. Um diese

Magnetfelder unterscheiden zu können, bezeichnen wir dasjenige, welches allein von den *freien Strömen* erzeugt wird, mit $\mu_0 \vec{H}$, während das Symbol \vec{B} für das Magnetfeld in Materie stehen bleibt. Das Ampèresche Gesetz gilt nun für das *freie magnetische Feld* \vec{H} in modifizierter Form,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_{\text{frei}} \quad \text{bzw.} \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}}, \quad (7.18)$$

die beiden Felder sind über die Beziehung

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad (7.19)$$

miteinander verbunden.

7.3.2 Suszeptibilität und Permeabilität

Meßgröße in Materie ist analog zur elektrischen Feldstärke \vec{E} die magnetische Feldstärke \vec{B} . Im Falle von Dia- und Paramagnetismus ist die Magnetisierung proportional zum magnetischen Feld. Naheliegend ist daher die lineare Näherung

$$\mu_0 \vec{M} = \tilde{\chi}_M \vec{B}, \quad (7.20)$$

es ergibt sich dann für das freie magnetische Feld

$$\mu_0 \vec{H} = (1 - \tilde{\chi}_M) \vec{B}. \quad (7.21)$$

Dieser Weg ist jedoch nicht der traditionelle. Vielmehr wird hier die Magnetisierung proportional zum freien magnetischen Feld angesetzt, $\vec{M} = \chi_M \vec{H}$, und es gilt

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_M) \vec{H} =: \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (7.22)$$

χ_M ist die *magnetische Suszeptibilität*, μ die *Permeabilität*, und beide hängen vom Material ab. Die beiden Suszeptibilitäten χ_M und $\tilde{\chi}_M$ sind über die Beziehung $1 + \chi_M = (1 - \tilde{\chi}_M)^{-1}$ miteinander verbunden. Ist $\tilde{\chi}_M$ klein gegen Eins, so stimmen beide etwa überein, für $\tilde{\chi}_M \rightarrow 1$ wächst χ_M über alle Grenzen, es kommt zur *Magnetisierungskatastrophe*.

7.3.3 Besonderheiten der Permeabilität

Zu bemerken bleibt noch, daß nach wie vor $\text{div } \vec{B} = 0$ ist, denn der Fluß des magnetischen Feldes bezog sich immer auf das effektive und nicht das freie Feld. Damit folgt jedoch nicht automatisch $\text{div } \vec{H} = 0$, denn die Permeabilität kann durchaus ortsabhängig sein. Weiterhin ist die lineare Beziehung zwischen Magnetisierung und freiem magnetischen Feld nur beim Dia- und Paramagnetismus gegeben. Für den Ferromagnetismus kann die Abhängigkeit ganz anders aussehen, die Permeabilität ist dann eine Tensorgröße. Dies soll uns im nächsten Abschnitt beschäftigen.

7.4 Ferromagnetismus

Ferromagnetismus ist eine verstärkte Form des Paramagnetismus, die sich jedoch dadurch auszeichnet, daß sich die Spins der an der Magnetisierung beteiligten Elektronen gegenseitig beeinflussen. So ist der gleich ausgerichtete Spin benachbarter Elektronen energetisch günstiger als die willkürliche Verteilung oder gar die paarweise Kompensation der Spins (was im übrigen bei mehr als eindimensionaler Anordnung auch zu Effekten wie der „Spinfrustration“ führt, auf die wir hier jedoch nicht weiter eingehen werden). So kommt es, daß das Material auch nach Abschaltung des äußeren Magnetfeldes noch seine Magnetisierung behält.

7.4.1 Die Curie-Temperatur

Der Effekt bleibender Magnetisierung wird erst oberhalb der bereits erwähnten *Curie-Temperatur* durch thermische Bewegung aufgehoben. Ferromagnetische Materialien wie Eisen werden in Transformatorkernen verwendet, um das Magnetfeld von der einen Spule gebündelt auf die andere zu übertragen. Wir können daher das Temperaturverhalten beobachten, indem wir in einer einfachen, in Abbildung 7.4 gezeigten Transformatorkonstruktion den Eisenkern erwärmen. Die induzierte Spannung in der Sekundärspule fällt dann bei der Curie-Temperatur auf Null zurück.

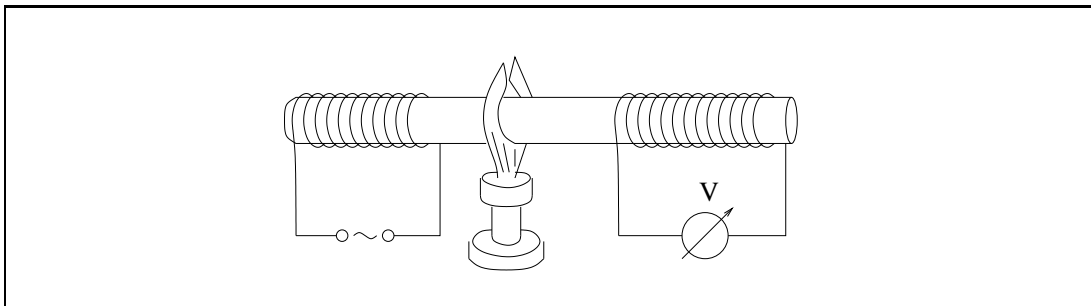


Abb. 7.4 Messung der Curie-Temperatur

7.4.2 Weißsche Bezirke

Die *Austauschwechselwirkung*, die zur Gesamtenergie des magnetisierten Materials einen Anteil $-J_A \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$ beisteuert, sorgt für die Parallelstellung der Spins. Jedoch ist eine gleichmäßige Polarisierung des gesamten Materials auch nicht günstig. Daher wird ein Kompromiß gewählt: Es werden größere Bezirke, auch *Domänen* oder *Weißsche Bezirke* ausgebildet, welche dieselbe Polarisierung besitzen.

Daß die Übergänge zwischen diesen Domänen nicht fließend sind, sich vielmehr *Domänenwände* ausbilden, dafür sorgen die „*leichten Richtungen*“ im Material, also Richtungen, in die Spins bevorzugt ausgerichtet werden. Es sind dies meist die Achsen des kristallinen Materials, beim Eisen beispielsweise die Richtungen (100), (010) und (001), wie sie in Abbildung 7.5 dargestellt sind, symbolisch daneben die Domänen und ihre Wände.

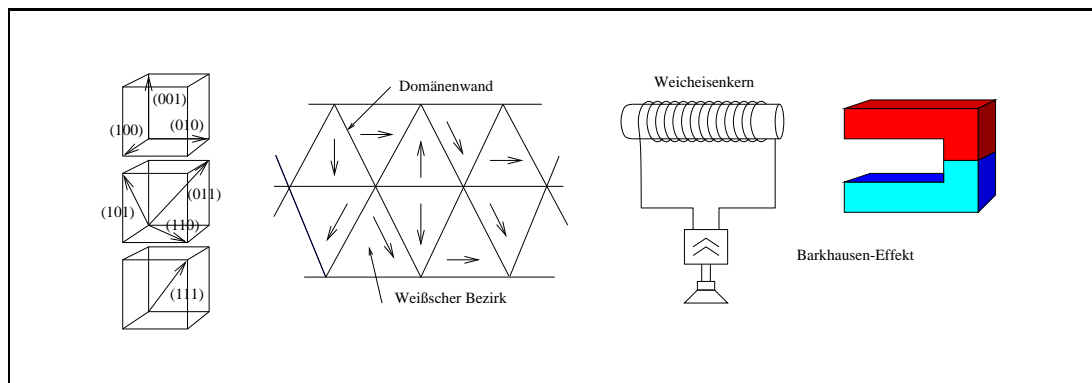


Abb. 7.5 Weissche Bezirke und Barkhausen-Effekt

Wird ein äußeres Magnetfeld angelegt, so werden diese Wände verschoben. Dieser *Barkhausen-Effekt* läßt sich sogar hörbar machen, denn das Umklappen führt zu Induktionsstößen, die in einer Induktionsspule registriert und über einen Lautsprecher wiedergegeben werden können (vgl. Abbildung 7.5).

7.4.3 Die Hysteresekurve

Wieder an dem Eisenkern eines Transformators soll die makroskopische Auswirkung des Ferromagnetismus demonstriert werden. Dazu schließen wir die Sekundärspule an die Vertikal-, die Primärspule an die Horizontalablenkung eines Oszillographen an. Es wird also quasi das effektive gegen das freie magnetische Feld „aufgetragen“. Beim ersten „Hochfahren“ des Magnetfeldes geht die Kurve vom Ursprung aus. Dann jedoch ändert sich ihre Charakteristik:

Für hohe Werte des freien Magnetfeldes H tritt eine *Sättigung* ein, der Eisenkern ist maximal magnetisiert. Geht danach das freie Feld auf Null zurück, so bleibt ein effektives Magnetfeld erhalten. Wir sprechen hier von *Remanenz*. Es verschwindet erst dann, wenn das freie Feld auf einen entgegengesetzt gerichteten Wert gestiegen ist, welcher als *Koerzitivfeldstärke* bezeichnet wird. Dieses Verhalten setzt sich punktsymmetrisch zum Ursprung fort, den die Kurve jetzt jedoch nicht mehr trifft. Wir sprechen von einer *Hysteresekurve*.

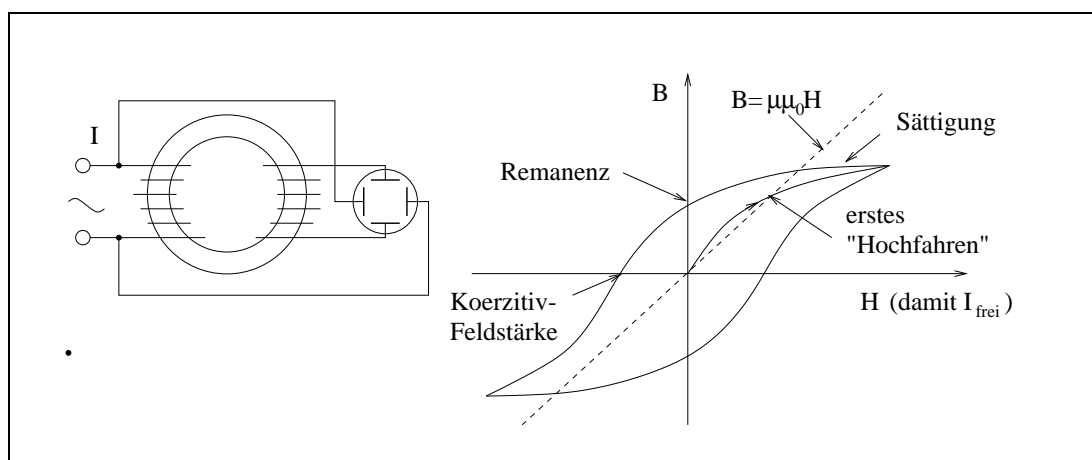


Abb. 7.6 Die Hysteresekurve und ihre Messung

7.5 Die Energie des magnetischen Feldes mit Materie

Die Energie ist gleich derjenigen Arbeit, die ein freier Strom gegen ein effektives Magnetfeld leistet. Es ergibt sich dann ziemlich direkt

$$\begin{aligned}\Delta W &= U \Delta Q = IU \Delta t = I n \Delta \Phi_M = \\ &= I n A \Delta B = H l A \Delta B = V H \Delta B\end{aligned}\quad (7.23)$$

und damit für die Energiedichte

$$w_M = \int_0^B \vec{H} \cdot d\vec{B}.\quad (7.24)$$

Diese Energiedichte läßt sich über ein beliebiges felderfülltes Volumen integrieren, wenn die lineare Näherung $B = \mu_0 \mu H$ verwendet wird. Es ist dann

$$W_M = \frac{1}{2} \mu_0 \mu \int H^2 dV = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2 \mu_0 \mu} \int B^2 dV.\quad (7.25)$$

Die mittlere Formel ist die allgemeinste, sie gilt auch für ferromagnetische Substanzen, also bei Nichtgültigkeit der linearen Beziehung zwischen freier und effektiver magnetischer Feldstärke. Diese Formeln sind in direkter Analogie zu den entsprechenden Ausdrücken für das elektrische Feld,

$$w_E = \int_0^D \vec{E} \cdot d\vec{D}\quad (7.26)$$

und

$$W_E = \frac{1}{2 \varepsilon_0 \varepsilon} \int D^2 dV = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \int E^2 dV\quad (7.27)$$

zu sehen.

7.6 Induktivität in Materie

Nach Gleichung (6.20) ist die Induktivität oder Selbstinduktion einer Spule gegeben durch den Quotienten aus dem magnetischen Fluß Φ_M und dem freien Strom, also umgekehrt

$$LI = \Phi_M = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \mu_0 \mu \int \vec{H} \cdot d\vec{a}.\quad (7.28)$$

Im materiefreien Raum wird μ zu Eins, es ist daher

$$L = \mu L_0,\quad (7.29)$$

wobei L_0 die Induktivität ohne Materie bezeichnet.

8. Die Maxwell'schen Gleichungen

Der physikalische Gaußsche und Stokessche Satz für die elektrische Feldstärke in den Gleichungen (1.64) und (1.65) sowie der Gaußsche Satz für das Magnetfeld in Gleichung (5.27) wie auch das Ampèresche Gesetz in Gleichung (5.28) bilden einen Satz von Gleichungen, die erstmals von dem englischen Physiker James Clerk Maxwell (1831–1879) zusammengesetzt und nach ihm benannt wurden. Es handelt sich hierbei um die *stationären Maxwell'schen Gleichungen*,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Diese Gleichungen haben bei uns im Laufe der Kapitel zwei wichtige Erweiterungen erfahren. So ersetzte die aus Gleichung (6.11) ablesbare differentielle Form des *Faradayschen Induktionsgesetzes*

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8.2)$$

die einfache Stokessche Formel. In einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld ist die Arbeit, die das elektrische Feld leistet, also nicht mehr wegunabhängig. Ferner konnten wir im dritten und im letzten Kapitel diese Gleichungen auf materiegefüllte Bereiche des Raumes übertragen und erhielten so die *nichtstationären Maxwell'schen Gleichungen*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{mit} & \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} & \text{mit} & \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

wobei ρ und \vec{j} die freie Ladungs- bzw. Stromdichte und \vec{P} und \vec{M} die Polarisation bzw. Magnetisierung waren ($\mu_0 \varepsilon_0 = c^{-2}$). Wir müssen jedoch auch nach diesen Änderungen feststellen, daß die Gleichungen immer noch nicht vollständig sind. Denn berechnen wir die Divergenz der Rotation des freien magnetischen Feldes, so verschwindet dieser Ausdruck aus mathematischen Gründen, auf der anderen Seite steht jedoch die Divergenz der Stromdichte, die nach der Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (8.4)$$

gleich der zeitlichen Abnahme der Ladungsdichte ist. Im nichtstationären Fall ist dieses System also nicht konsistent. Um diesen Defekt auszugleichen, suchen wir eine sogenannte *Verschiebungsstromdichte* \vec{j}_D mit $\operatorname{div} \vec{j}_D = \partial \rho / \partial t$, so daß mit $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_D$ die Divergenz auf beiden Seiten verschwindet.

8.1 Berechnung des Verschiebungsstroms

Ein typisches Beispiel für nichtstationäres Verhalten ist, wie bereits erläutert, der Plattenkondensator, der sich über einen Widerstand entlädt. Wir legen in Gedanken um die positiv geladene Platte des Kondensators eine geschlossene Fläche. Die Oberfläche wird von einer auf ihr verlaufenden Kreislinie C in zwei ungleiche Hälften zerlegt: die Kreisfläche S , durch die der Strom fließt, und die Restfläche S' . V sei das eingeschlossene Volumen. Dann gilt wegen $\text{div}(\text{rot } \vec{H}) = 0$ nach dem mathematischen Gaußschen Satz

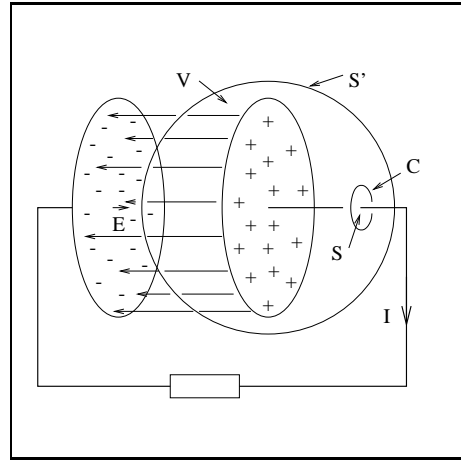


Abb. 8.1 Der Verschiebungsstrom

$$\int_V \text{div}(\text{rot } \vec{H}) dV = \int_{S+S'} \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{a} = 0, \quad \text{also}$$

$$\int_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{a} = - \int_{S'} \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{a}, \tag{8.5}$$

wobei die Normalenvektoren beider Flächen nach außen zeigen. Lassen wir die Kreislinie nun zusammenschrumpfen, so gilt

$$\int_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{a} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{a} = I. \tag{8.6}$$

Dies bedeutet aber, daß auch die rechte Seite von Gleichung (8.5) ebenfalls einen Strombeitrag liefern muß, den *Verschiebungsstrom* I_D . Um dies zu erfüllen, kann das Ampèresche Gesetz erweitert werden zu

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_D \quad \text{mit} \quad \vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{8.7}$$

Der Verschiebungsstrom ist der Strom, der bei der Entladung des Kondensators durch diesen hindurchzufließen scheint. Es ergibt sich dann mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung in Einklang mit der mathematischen Forderung

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot } \vec{H}) &= \text{div } \vec{j} + \text{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \text{div } \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{D}) = \\ &= \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Im materiefreien Fall, auf den wir uns nach dem nächsten Unterabschnitt beschränken wollen, gilt $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ und $\mu_0 \vec{H} = \vec{B}$.

8.1.1 Elektromagnetisches Feld und Poynting-Vektor

Zum Abschluß des vorangegangenen Kapitels haben wir die Energie des elektrischen und des magnetischen Feldes getrennt dargestellt. Doch wie sieht es mit der Kombination, dem *elektromagnetischen Feld* aus, das sich aus der Maxwell'schen Theorie ergibt? Zunächst einmal wirkt das elektromagnetische Feld auf Ladungen und verrichtet an ihnen Arbeit, indem es diese beschleunigt oder abbremsst. Die an der geladenen Materie pro Zeiteinheit und pro Volumenelement verrichtete Arbeit ist

$$nq\vec{v} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = nq\vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (8.9)$$

(n ist die Teilchendichte). Aufgrund des Energieerhaltungssatzes muß das elektromagnetische Feld die Energie, die es in Form von Arbeit verbraucht hat, selbst verlieren. Mit Hilfe der Maxwell'schen Gleichungen ist es uns möglich, diesen Energieverlust durch innere Größen des elektromagnetischen Feldes, also die elektrische und magnetische Feldstärke, auszudrücken. Dazu setzen wir die Stromdichte aus Gleichung (8.7) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{j} \cdot \vec{E} &= \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \\ &= -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \cdot \vec{D} = \\ &= -\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \cdot \vec{D} = \\ &= -\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \right) = \\ &= -\operatorname{div} \vec{S}_{EM} - \frac{\partial w_{EM}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Dabei bezeichnet

$$\vec{S}_{EM} := \vec{E} \times \vec{H} \quad (8.11)$$

die *Energiestromdichte* oder den *Poynting-Vektor* (die Physiker O. Heavyside und J.H. Poynting entwickelten in Jahre 1884 die in diesem Unterabschnitt dargestellten Überlegungen) und

$$w_{EM} := \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad (8.12)$$

die *Energiedichte* des elektromagnetischen Feldes, die sich additiv aus den Energiedichten des elektrischen und des magnetischen Feldes zusammensetzt. Integriert lautet Gleichung (8.10)

$$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV + \oint_{\partial V} \vec{S}_{EM} \cdot d\vec{a} = -\frac{d}{dt} \int_V w_{EM} dV \quad (8.13)$$

und bedeutet, daß die verrichtete Arbeit zusammen mit einem Energiestrom aus dem Volumen heraus sich in einer Verringerung der inneren Energie des elektromagnetischen Feldes niederschlägt.

8.1.2 Eindimensionale Lösung der homogenen Gleichungen

Im leeren Raum ist keine Ladung vorhanden, an der Arbeit verrichtet werden könnte. Daher verringert sich die Feldenergie in dem Maße, in dem Energie aus dem Volumen herausströmt. Das elektromagnetische Feld transportiert also anscheinend Energie, ist also eine wie auch immer geartete Strahlung. Wir behandeln zunächst das homogene, materiefreie System

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{rot} E &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (8.14)$$

und suchen Lösungen $\vec{E} = \vec{E}(x, t)$ und $\vec{B} = \vec{B}(x, t)$, die außer von der Zeit t nur von der Koordinate x abhängen. Die erste Gleichung liefert $\partial E_x / \partial x = 0$, das elektrische Feld in x -Richtung ist also räumlich konstant. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann

$$\vec{E}(x, t) = (0, E_y(x, t), 0). \quad (8.15)$$

gesetzt werden. Die zweite Maxwellsche Gleichung liefert damit

$$0 = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad 0 = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (8.16)$$

Da statische magnetische Felder uninteressant sind, kann hier

$$\vec{B}(x, t) = (0, 0, B_z(x, t)) \quad (8.17)$$

gewählt werden. Die dritte Maxwellsche Gleichung $\operatorname{div} B = 0$ bestätigt noch einmal, daß die Komponente B_z nicht von z abhängt. Zusammen mit der vierten Gleichung ergibt sich schließlich das gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (8.18)$$

Dieses läßt sich entkoppeln, indem jeweils eine der beiden Gleichungen nach x und die andere nach t abgeleitet wird. Es ergibt sich dann

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0. \quad (8.19)$$

Wir brauchen uns nur mit der ersten Gleichung zu beschäftigen, die andere ist analog zu behandeln. Es gibt nun zwei verschiedene Vorgehensweisen, diese Gleichung zu lösen, die hier vorgestellt und miteinander verbunden werden sollen.

Methode der Charakteristiken:

Eine Differentialgleichung der angegebenen Form läßt sich allgemein durch den Ansatz $E_y(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$ lösen. Die Argumente dieser zwei Funktionen werden als *Charakteristiken* der Differentialgleichung bezeichnet, daher der Name. Sie beschreiben, wie sich die Lösungen, die zum Zeitpunkt $t = 0$ die Gestalten $f_1(x)$ und $f_2(x)$ besitzen, zeitlich entwickeln. So beschreibt f_1 eine Lösung, die sich „nach rechts“ und f_2 eine Lösung, die sich „nach links“ bewegt, und zwar jeweils mit einer Geschwindigkeit c , die zunächst allgemeine Werte annehmen kann. Diese beiden Lösungen überlagern sich zur Gesamtlösung. Das Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = f'' + g'' = \mu_0 \varepsilon_0 (c^2 f'' + c^2 g'') = \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \quad (8.20)$$

und damit $c^2 = 1/\mu_0 \varepsilon_0$. Die Geschwindigkeit der Ausbreitung ist also die Lichtgeschwindigkeit. Eine *stehende Welle* entsteht beispielsweise durch Überlagerung zweier Lösungen mit gleicher Anfangsgestalt. So ist aufgrund der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen

$$\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t) = 2 \cos(kx) \cos(\omega t). \quad (8.21)$$

Hier sind Orts- und Zeitabhängigkeit getrennt. Dies führt uns gleich zum...

Separationsansatz und Trennung der Veränderlichen:

Wir wählen hier den Ansatz $E_y(x, t) = f(x)g(t)$. Diesen in die Differentialgleichung eingesetzt, liefert

$$g(t) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2} f(x) \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = 0. \quad (8.22)$$

Diese Gleichung kann so umgestellt werden, daß auf der einen Seite nur Größen stehen, die nur von x , auf der anderen Seite solche, die nur von t abhängen, die Veränderlichen also getrennt sind. Dann muß jede Seite gleich einer zeitlich und räumlich konstanten Zahl sein,

$$\frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2 g(t)} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = -k^2. \quad (8.23)$$

Umgestellt liefert dies die entkoppelten Gleichungen

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + k^2 f(x) = 0 \quad \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + k^2 c^2 g(t) = 0 \quad (8.24)$$

und als Lösungen dieser Gleichungen

$$\begin{aligned} f(x) &= f_{01} \cos(kx) + f_{02} \sin(kx), \\ g(t) &= g_{01} \cos(\omega t) + g_{02} \sin(\omega t) \quad \text{mit } \omega := kc \end{aligned} \quad (8.25)$$

Die Randbedingungen $E_y(0, t) = E_y(L, t) = 0$ übertragen sich nur auf die Funktion f und liefern $f_{02} = 0$ und $kL = n\pi$, und für die Anfangsbedingung $E_y(x, 0) = g(0) = 0$ ergibt sich die stehende Welle

$$E_y(x, t) = E_0 \sin(k_n x) \sin(\omega_n t), \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \omega_n = k_n c. \quad (8.26)$$

8.1.3 Wellenausbreitung und Wellenvektor

Die im letzten Unterabschnitt gewonnene Lösung läßt sich verallgemeinern zu

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (8.27)$$

Der Vektor $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)^T$ mit $\omega = c|\vec{k}|$ ist der *Wellenvektor*, der in Richtung der Wellenausbreitung zeigt. Wir wollen nun diesen Ansatz für \vec{E} in die Maxwell'schen Gleichungen einsetzen, berechnen dazu zunächst

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\vec{k} \cdot \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\vec{k} \times \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \end{aligned} \quad (8.28)$$

Dann folgt aus $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, daß das elektrische Feld transversal zur Ausbreitungsrichtung steht, aus $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ ergibt sich die magnetische Feldstärke zu

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad \omega \vec{B}_0 = \vec{k} \times \vec{E}_0 \quad (8.29)$$

und schließlich ergibt $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, daß auch das magnetische Feld senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung steht. Der Poynting-Vektor schließlich zeigt in Richtung der Wellenausbreitung,

$$\vec{S}_{EM} = \frac{\vec{k}}{\omega \mu_0} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (8.30)$$

Wir haben also ein Dreibein $\{\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}\}$ paarweise aufeinander senkrecht stehender Vektoren, welche die elektromagnetische Welle beschreiben.

8.1.4 Der Tesla-Transformator

Daß eine solche Ausbreitung elektromagnetischer Strahlung tatsächlich stattfindet, kann an einem eindrucksvollen Versuch demonstriert werden. Der *Tesla-Transformator* wurde 1892 von Nicola Tesla konstruiert. In die aus wenigen Windungen bestehende Spule eines funkenenerregten Primärschwingkreises wird dazu eine aus vielen Windungen bestehende Sekundärspule gesteckt. Obwohl die Induktivitäten sehr unterschiedlich sind, kann wegen der geringen Kapazität des Sekundärkreises die Kapazität im Primärkreis so gewählt werden, daß sich die Kreise in Resonanz befinden,

$$\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}. \quad (8.31)$$

Zu beobachten sind im Resonanzfall starke Sprühercheinungen an der Sekundärspule. Ferner erkennen wir, daß Elektronenröhren in einiger Entfernung selbständig aufleuchten. Diese Effekte sind auf die erzeugte hochfrequente Strahlung hoher Spannungsamplitude zurückzuführen, die dabei entstehenden Ströme sind jedoch aufgrund der hohen Frequenz für den Menschen ungefährlich.

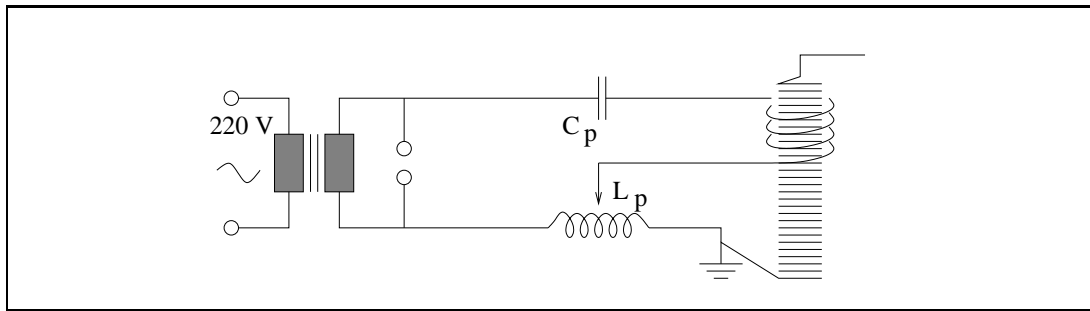


Abb. 8.2 Der Tesla-Transformator

8.2 Wellenerzeugung am Hertzschen Dipol

Ein periodisch wechselndes elektrisches Feld wird in einem Kondensator, ein wechselndes magnetisches Feld in einer Spule erzeugt, wenn beide zu einem Schwingkreis verbunden sind. Ein solcher Schwingkreis kann von einem zweiten Stromkreis, an den eine Wechselspannung angelegt ist, induktiv angeregt werden. Ist die Frequenz dieser Anregung gleich der Eigenfrequenz des Schwingkreises, so sorgt die Anregung für eine kräftige Schwingung. Es war eine der bedeutendsten Leistungen des deutschen Physikers Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894), daß er daraus eine Schaltung zur Erzeugung elektromagnetischer Wellen konstruierte. Denn biegen wir den Schwingkreis an der Stelle des Kondensators in Gedanken gerade und ziehen die Spule zu einem geraden Draht auseinander, wie es in Abbildung 8.3 zu sehen ist, so kann weiterhin Resonanz erreicht werden.

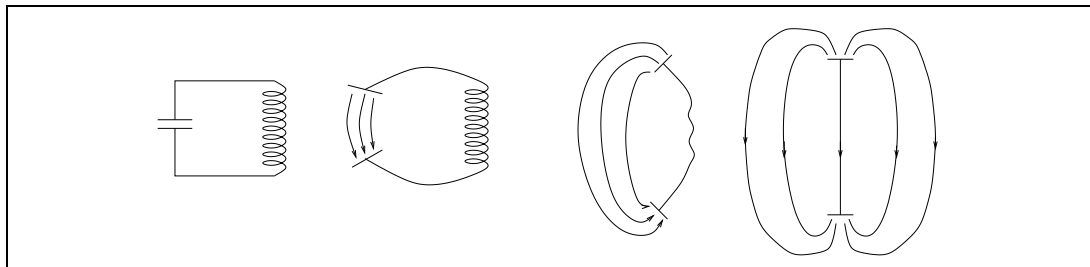


Abb. 8.3 Konstruktion des Hertzschen Dipols

Das elektrische und das magnetische Feld greifen jetzt jedoch quasi ineinander. Sind die beiden Enden des Drahtes, also die vormaligen Kondensatorplatten, maximal polarisiert, so bildet sich zwischen ihnen ein elektrisches Feld. Zu diesem Zeitpunkt ist der Strom zwischen ihnen verebbt. Als Entladungsstrom schwillt er daraufhin an und erreicht seinerseits seinen Maximalwert, wenn die Polarität aufgehoben ist. Zu diesem Zeitpunkt ist dann das magnetische Feld, das sich um den Draht herum bildet, am größten. Der Draht wird nun andersherum polarisiert, der Vorgang setzt sich entsprechend fort. Die Feldlinien lösen sich vom Draht und bewegen sich radial von ihm weg. Die Phasenverschiebung um $\pi/2$, die noch zu Beginn der Erzeugung vorhanden war, wird im Laufe dieser Ausbreitung zu Null, so daß sich schließlich Wellenfronten wie die im letzten Unterabschnitt berechneten ergeben, die näherungsweise eben sind.

Abbildung 8.4 zeigt diese Wellenerzeugung. Aufgrund der wechselseitigen Ausbildung eines elektrischen und eines magnetischen Dipols wird diese primitive Sendeantenne als *Hertzscher Dipol* bezeichnet.

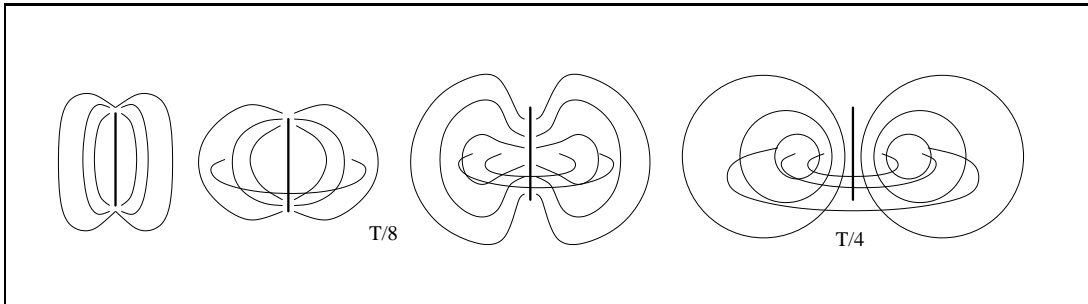


Abb. 8.4 Wellenerzeugung am Hertzschen Dipol

8.2.1 Empfang der elektromagnetischen Strahlung

Die elektromagnetischen Wellen können ähnlich empfangen werden, wie sie erzeugt worden sind, nämlich an einem Dipol. Die elektrischen und magnetischen Felder erzeugen auf einem parallel zum elektrischen Feldvektor stehenden Dipol einen Wechselstrom, den wir in einem ersten Versuch mit Hilfe einer Glühbirne nachweisen, die in seiner Mitte liegt (Abbildung 8.5 links). Drehen wir diesen Dipol relativ zum Sender, so erkennen wir eine Abnahme der Empfangsintensität. Sie besitzt das Verhalten $\cos^2 \theta$, wobei θ den Winkel zwischen den beiden Dipolen angibt.

Zu einem weiteren Versuch benutzen wir einen Sender mit einer Frequenz von 433MHz (Frequenzen werden übrigens auch nach dem Physiker Heinrich Hertz benannt, $1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$) und einer sich daraus ergebenden Wellenlänge von 68cm . Der Dipol hat daher eine Länge von 32cm . In einer Glaswanne sind zwei Empfangsdipole angebracht, einer von 32cm und einer von 6cm Länge. Zunächst empfängt der erste Dipol. Gießen wir aber in die Wanne Wasser, so empfängt der zweite die elektromagnetische Strahlung (Abbildung 8.5 mitte). In Wasser ist die Ausbreitung der Strahlung um einen Faktor $1/\sqrt{\epsilon}$ geringer geworden, also die Wellenlänge auch. Wir berechnen aus diesem Experiment die frequenzabhängige Dielektrizitätszahl zu $\epsilon(\nu = 433\text{MHz}) = (32/6)^2 \approx 2.6$. Sie weicht sehr stark vom Wert $\epsilon(\nu = 0) = 81$ ab.

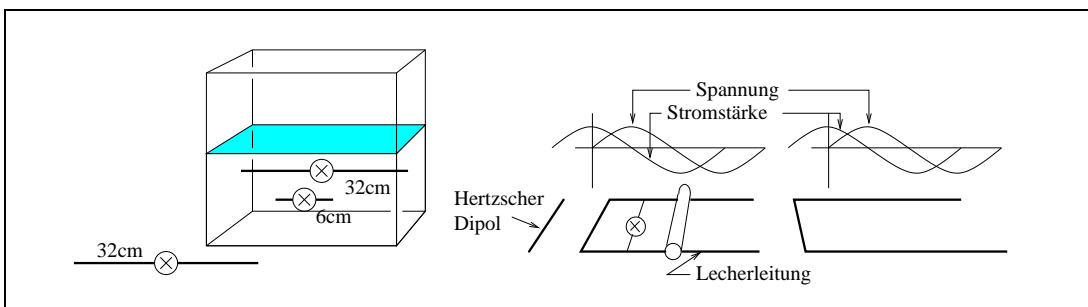


Abb. 8.5 Empfangsdipol und Lecher-Leitung

8.2.2 Die Lecher-Leitung

Die *Lecher-Leitung* (E. Lecher, 1890) hat neben dem dem Drahtstück, welches parallel zum sendenden Hertzschen Dipol kapazitiv an diesen gekoppelt ist, zwei dazu senkrechte Ableitungen. Auf diesen bilden sich Wellen der Spannung und Stromstärke aus. Randbedingungen an das andere Ende der Ableitungen führen zur Ausbildung stehender Wellen. So sorgt eine Metallbrücke dafür, daß an dieser Stelle die Spannung ausgeglichen ist, die reflektierte Spannungswelle ist also gegen die einlaufende um π phasenverschoben. Als Beziehung zwischen Länge L des nicht kurgeschlossenen Abschnitts und der Wellenlänge λ der Welle ergibt sich hier $L = \frac{n}{2}\lambda$. Sind dagegen die Enden der Ableitungen frei, so verschwindet dort der Strom, die Empfangsbedingung ist hier $L = (2n + 1)\lambda/4$. Wir können die stehenden Wellen beobachten, indem wir eine Drahtbrücke mit Glühbirne an verschiedenen Stellen auf die Lecherleitung auflegen (siehe Abbildung 8.5 rechts). Im Versuch messen wir das Verhältnis von Länge und Wellenlänge bei offenem Ende als $5/4$.

8.2.3 Mikrowellenversuche

Wir experimentieren zum Abschluß mit einem *Mikrowellensender*, der aus einem in einen Trichter eingebauten Hertzschen Dipol aufgebaut ist. Der Hertzsche Dipol gibt seine Polarisationsrichtung, also die Ausrichtung des elektrischen Feldvektors, vor. Mit einem darauf abgestimmten Mikrowellenempfänger derselben Bauart kann die Strahlung empfangen werden. Stellen wir diesen um 90° gegen den Sender auf, so wird erneut kein Signal empfangen. Wir können die Strahlung an einer Metallplatte reflektieren und erhalten hier das optische Prinzip „Einfallswinkel=Ausfallswinkel“. An Materialien wie Pappe wird nur ein Teil der Strahlung reflektiert. An einer Metallwand können stehende Wellen ausgebildet werden. Damit läßt sich für die Wellenlänge ein Wert von $\lambda = 2.8\text{cm}$ und damit eine Frequenz $\nu \approx 10\text{GHz}$ bestimmen.

Ein Metallrost als Polarisationsgitter läßt nur die Strahlung einer Richtung passieren. Hier erreicht die Strahlung den senkrecht stehenden Empfänger, da es zu einer zweifachen Projektion des Polarisationsvektors kommt, wie Abbildung 8.6 zeigt. Von einer *zirkulären Polarisation* spricht man, wenn es beim Durchgang durch ein Medium zu einer Drehung des Polarisationsvektors kommt. Schließlich sei noch erwähnt, daß die Mikrowellen eines Mikrowellenherdes das Wasser und andere polare Moleküle durch Biegung der Molekülstruktur erwärmen.

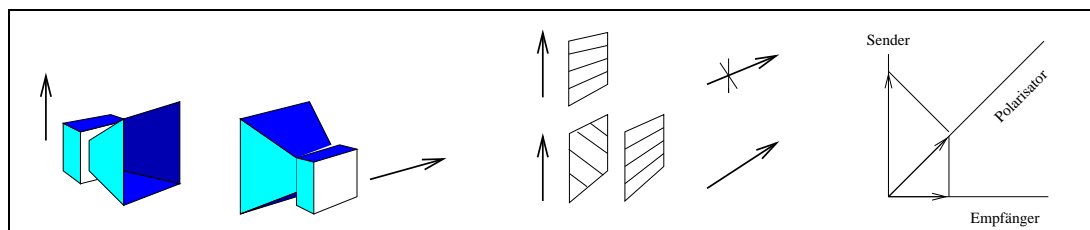


Abb. 8.6 Polarisationsversuche mit Mikrowellen

8.3 Eichung der Maxwell'schen Gleichungen

Die in sich konsistenten Maxwell'schen Gleichungen in ihrer materiefreien Form

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (8.32)$$

bilden ein lineares partielles Differentialgleichungssystem erster Ordnung, das gekoppelt und inhomogen ist. Es kann jedoch gelöst werden, indem zwei bereits verwendete Felder benutzt werden, die nun auch zeitabhängig sein können: Das *skalare Potential* $\varphi(\vec{r}, t)$ und das *Vektorpotential* $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Das Vektorpotential ergibt sich zunächst aus der Tatsache, daß stets $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ gilt, also zu jedem beliebigen Zeitpunkt und an jedem Ort. Damit ist das magnetische Feld darstellbar als $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$. Dies setzen wir nun in die zweite Gleichung aus (8.32) ein und erhalten

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \vec{A}) = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (8.33)$$

Aus dieser Gleichung wiederum ergibt sich, daß sich der Klammerausdruck als Gradient einer Funktion schreiben läßt. Aus den elektrostatischen Kapiteln übernehmen wir hier in Verallgemeinerung, daß diese Funktion das skalare Potential sein muß, genauer

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (8.34)$$

Als *Ansatz* zur Lösung des Differentialgleichungssystems ergibt sich somit

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}, t) \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = -\operatorname{grad} \varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (8.35)$$

8.3.1 Die Eichinvarianz

Die Größen \vec{A} und φ sind bei vorgegebenem elektrischem und magnetischem Feld nicht eindeutig bestimmt. Das hatten wir schon im Kapitel zur Magnetostatik erkannt und eine Eichfreiheit oder *Eichinvarianz* proklamiert, die sich dadurch auszeichnete, daß zum Vektorpotential der Gradient einer beliebigen Funktion addiert werden konnte. Auch für das skalare Potential war uns ein trivialer Fall einer solchen Eichinvarianz bekannt, die Addition einer Konstanten nämlich. Im Fall der gekoppelten Gleichungen sind auch die Eichfreiheiten gekoppelt, und zu zeigen ist in diesem Unterabschnitt zunächst, daß diese Eichfreiheit gegeben ist durch

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} f \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial}{\partial t} f. \quad (8.36)$$

Der erste Teil ist klar zu sehen, denn nach wie vor ist $\vec{B}' = \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}$. Für das elektrische Feld ergibt sich dagegen etwas komplizierter

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\text{grad } \varphi' - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}' = \\ &= -\text{grad } \varphi + \text{grad} \left(\frac{\partial}{\partial t} f \right) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } f = \vec{E}. \end{aligned} \quad (8.37)$$

8.3.2 Die Lorentz-Eichung

Der Ansatz wird nun in die verbleibende erste und letzte der Gleichungen (8.32) eingesetzt. Dies führt unter Zuhilfenahme der Gleichungen $\text{div}(\text{grad } \varphi) = \Delta \varphi$ und $\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$ auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\Delta \varphi - \text{div} \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ -\Delta \vec{A} + \text{grad}(\text{div } \vec{A}) &= \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \varphi) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Wenn wir hier erneut die Coulomb-Eichung $\text{div } \vec{A} = 0$ verwenden, so können wir das System dieser Gleichungen nur zum Teil entkoppeln. Die zweite Gleichung bleibt weiterhin von φ abhängig. Erst die *Lorentz-Eichung*

$$\text{div } \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varphi \quad (8.39)$$

entkoppelt die Gleichungen vollständig und läßt sie zugleich strukturell gleich erscheinen,

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A}(\vec{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) &= -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) \\ \Delta \varphi(\vec{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (8.40)$$

Die Lorentz-Eichung ist mit der Eichfreiheit (8.36) möglich. Denn ist zunächst

$$\text{div } \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varphi = g(\vec{r}, t) \quad (8.41)$$

eine nicht identisch verschwindende Funktion, so kann für die Größen \vec{A}' und φ' dennoch die Lorentz-Eichung verlangt werden, denn dies führt auf

$$\begin{aligned} 0 &= \text{div } \vec{A}' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varphi' = \text{div } \vec{A} + \text{div } \text{grad } f + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varphi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} f = \\ &= g + \Delta f - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} f \Leftrightarrow \Delta f - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} f = -g. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Können die Gleichungen (8.40) aber für beliebige Ladungs- und Stromverteilungen gelöst werden, wie noch zu zeigen sein wird, so gilt dies auch für Gleichung (8.42), die vom selben Typ ist, die Funktion f ergänzt die Eichfelder aber dann zu solchen, welche der Lorentz-Eichung genügen.

8.3.3 Lösung der inhomogenen Wellengleichung

Wir wollen zunächst den Versuch unternehmen, die zweite Gleichung aus (8.40) für das skalare Feldes $\varphi(\vec{r}, t)$ zu lösen. Da jedoch die mathematischen Hilfsmittel in Form der Fouriertransformation zunächst nicht zur Verfügung stehen, soll hier versucht werden, einen Ansatz aus der bereits bekannten Lösung für zeitunabhängige Ladungsverteilungen herzuleiten und diesen anschließend zu bestätigen. Aus der Lösung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad \text{der Differentialgleichung} \quad \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (8.43)$$

und der soeben gewonnenen Erkenntnis, daß sich die Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen als Wellen der Geschwindigkeit c ausbreiten, kann als allgemeinsten Ansatz zunächst einmal

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (8.44)$$

angenommen werden. Die Beziehung zwischen dem Zeitpunkt t' einer Ladungsverteilung und dem Zeitpunkt t des sich daraus ergebenden Feldes liefert die einfache Überlegung, daß das Feld zum Zurücklegen des Weges $|\vec{r} - \vec{r}'|$ die Zeit $t - t' = |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ benötigt. Der Lösungsansatz

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) \frac{d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (8.45)$$

wird als *retardierte Lösung* bezeichnet. Die *avancierte Lösung* mit umgekehrter Beziehung zwischen t und t' , die ebenfalls die Differentialgleichung löst, wird vom Prinzip der *Kausalität* ausgeschlossen, welches besagt, daß eine Ursache stets vor ihrer Wirkung kommt.

Die angegebene Lösung ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Da man normalerweise diese als Summe aus der allgemeinen Lösung φ_a der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gewohnt ist, soll diese Darstellung auch hier konstruiert werden. Sie ergibt sich, wenn der Integrationsbereich aufgeteilt wird auf ein Volumen innerhalb eines kleinen Balles $U_\epsilon(\vec{r})$ um den Beobachtungsort und das Volumen außerhalb.

$$\varphi_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{U_\epsilon(\vec{r})} \rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) \frac{d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (8.46)$$

ist spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Das läßt sich leicht erkennen, denn wählen wir den Umgebungsradius ϵ sehr klein, so kann die Differenz $|\vec{r} - \vec{r}'|$ im Argument der Zeitvariablen fortgelassen werden, und es ergibt sich eine quasistatische Lösung, die zu jedem Zeitpunkt t der Lösung

in Gleichung (8.43) für eine praktisch punktförmige Ladungsverteilung entspricht. Die zweifache zeitliche Ableitung dieser Lösung verschwindet, denn diese punktförmige Ladungsdichte läßt sich aus dem Integral herausziehen, und übrig bleibt ein Integral

$$\int_{U_\varepsilon(\vec{r})} \frac{d^3 r}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int_0^\varepsilon \frac{4\pi s^2 ds}{s} = 2\pi\varepsilon^2, \quad (8.47)$$

das für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen Null geht. Damit erfüllt φ_i die zweite der inhomogenen Differentialgleichungen (8.40). φ_a dagegen ist Lösung der homogenen Differentialgleichung. Die Integration erstreckt sich hier über den ganzen dreidimensionalen Raum, ausgenommen ist lediglich eine winzige Umgebung um die Polstelle des Nenners, was für die Rechnungen recht praktisch ist. Im folgenden soll dieser Integrationsbereich nicht explizit angegeben sein. Wir führen die Abkürzungen $\Delta x = x - x'$, $\Delta y = y - y'$, $\Delta z = z - z'$, $\Delta r = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ und $t' = t - \Delta r/c$ ein und schreiben

$$\varphi_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{\Delta r} dV'. \quad (8.48)$$

Unter Verwendung der Ableitungen

$$\frac{\partial(\Delta r)}{\partial x} = \frac{\Delta x}{\Delta r}, \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{\Delta x}{c\Delta r} \quad \text{und} \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = 1 \quad (8.49)$$

berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_a}{\partial x} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \left(-\frac{1}{\Delta r^2} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{1}{\Delta r} \left(-\frac{\Delta x}{c\Delta r} \right) \frac{\partial\rho}{\partial t'} \right) dV' = \\ &= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\Delta x}{\Delta r^3} \left(\rho + \frac{\Delta r}{c} \frac{\partial\rho}{\partial t'} \right) dV', \\ \frac{\partial^2\varphi_a}{\partial x^2} &= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \int \left(\left(\frac{1}{\Delta r^3} - 3\frac{\Delta x^2}{\Delta r^5} \right) \left(\rho + \frac{\Delta r}{c} \frac{\partial\rho}{\partial t'} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta x}{\Delta r^3} \left(-\frac{\Delta x}{c\Delta r} \frac{\partial\rho}{\partial t'} + \frac{\Delta x}{c\Delta r} \frac{\partial\rho}{\partial t'} + \frac{\Delta x}{c} \left(-\frac{\Delta x}{c\Delta r} \right) \frac{\partial^2\rho}{\partial t'^2} \right) \right) dV'. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Für die Ableitungen nach y und z ergeben sich analoge Ausdrücke, insgesamt ist also

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_a &= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \int \left(\frac{3\Delta r^2 - 3(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}{\Delta r^5} \left(\rho + \frac{\Delta r}{c} \frac{\partial\rho}{\partial t'} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{c^2\Delta r^3} \frac{\partial^2\rho}{\partial t'^2} \right) dV' = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{c^2\Delta r} \frac{\partial^2\rho}{\partial t'^2} dV' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi_a}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (8.51)$$

8.4 Lorentzkovariante Formulierung der Theorie

Die erste der Gleichungen (8.40) läßt sich analog zu der vorangegangenen Rechnung ebenfalls durch ein retardiertes Potential lösen. Die auffällige Ähnlichkeit zwischen skalarem und Vektorpotential auf der einen und Ladungsdichte und Stromdichte auf der anderen Seite läßt sich in einer kompakten Schreibweise fassen. Wir können diese Größen nämlich als Komponenten eines Vektors im vierdimensionalen, quasimetrischen *Minkowskiraum* auffassen. Dieser Raum wird bestimmt durch einen *metrischen Tensor*

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.52)$$

mit welchem sich die Länge eines Vektors $v = (v^\mu) = (v^0, v^1, v^2, v^3)^T$ (T bezeichnet die Transposition des Zeilen- zum Spaltenvektor) schreibt als

$$v^2 := \sum_{\mu=0}^3 v_\mu v^\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\nu\mu} v^\nu v^\mu = (v^0)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2. \quad (8.53)$$

Die Metrik vermittelt dem Raum die Eigenschaft, daß solche Längen oder allgemeiner auch Skalarprodukte von Vektoren unter den Lorentztransformationen, der wir in Kapitel 5 begegneten, invariant bleiben. Wir bezeichnen die Vektoren v des Minkowskiraumes als *Vierervektoren* mit einer zeitartigen Komponente v^0 und drei raumartigen Komponenten v^1 , v^2 und v^3 , die sich zu einem normalen Dreivektor $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)^T$ verbinden lassen. Die Komponenten von Vierervektoren werden definitionsgemäß in ihrer *kontravarianten* Form, also mit hochgestelltem Index, geschrieben. Über die Metrik g ergibt sich die *kovariante Form*

$$v_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} v^\nu = (v^0, -v^1, -v^2, -v^3). \quad (8.54)$$

In allen bisherigen Summen erkennen wir, daß stets über Indizes summiert wird, die gemischt kontra- und kovariant stehen. Diese Summation läuft von 0 bis 3. Um die Schreibweise zu vereinfachen, benutzen wir daher die ...

Einsteinsche Summationskonvention:

Über jeden doppelt und gemischt ko- und kontravariant auftretenden Index μ wird summiert, $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Schließlich kann die kovariante Form eines Vektors mittels des Inversen $g^{-1} = (g^{\mu\nu})$ des metrischen Tensors (mit $g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$) auch wieder auf die kontravariante Form gebracht werden,

$$v^\mu = g^{\mu\nu} v_\nu. \quad (\text{mit Summationskonvention!}) \quad (8.55)$$

8.4.1 Konstruktion der Vierervektoren von Ort und Impuls

Aus der speziellen Relativitätstheorie wissen wir, daß das „Streckenstück“ der Raumzeit, $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ invariant unter Lorentztransformationen ist. Wir können daher das *Differential*

$$(dx^\mu) = (c dt, dx, dy, dz)^T = (c dt, d\vec{r})^T \quad (8.56)$$

als einen ersten Vierervektor auffassen. Ein weiterer ist

$$(\partial_\mu) := \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)^T. \quad (8.57)$$

Ein kontravarianter Index im „Nenner“ wird als kovariant interpretiert. Aus diesem Differentialoperator in Form eines Vierervektors ergibt sich der verallgemeinerte Laplace-Operator, der gleich dem Negativen des *d'Alembert-Operators* ist,

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\square. \quad (8.58)$$

Der Vierervektor von Energie und Impuls, der hier allerdings keine Rolle spielt, besitzt schließlich die Form

$$(p^\mu) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right)^T = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)^T. \quad (8.59)$$

8.4.2 Konstruktion der Vierervektoren zu Strom und Potential

Die Kontinuitätsgleichung (8.4) läßt sich die kovariante Form

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (8.60)$$

bringen, wenn wir für den *Stromvierervektor* die Kombination

$$(j^\mu) = (c\rho, j_x, j_y, j_z)^T = (c\rho, \vec{j})^T \quad (8.61)$$

wählen. Besitzt der Vierervektor der Stromdichte also eine ähnliche Gestalt wie der Vierervektor des Ortes, so entspricht der Vierervektor des *Potentials* in seiner Einheitenstruktur dem Impuls. Er kombiniert das skalare mit dem Vektorpotential,

$$(a^\mu) = \left(\frac{\varphi}{c}, A_x, A_y, A_z \right)^T = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A} \right)^T. \quad (8.62)$$

Mit Hilfe dieser Vierervektoren lassen sich nun die Maxwell'schen Gleichungen auf eine neue und kompaktere Form bringen. Wir wollen den gesamten Weg abschreiten und beginnen mit den Gleichungen (8.38). Sie schreiben sich nun wegen $-\Delta = -\square - \partial^2/\partial(ct)^2$ als

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\partial_\mu A^\mu) &= \varepsilon_0 \rho \\ \partial_\mu \partial^\mu \vec{A} + \nabla (\partial_\mu A^\mu) &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned} \quad (8.63)$$

Die beiden Gleichungen können als zeitliche bzw. räumliche Komponenten einer Vektorgleichung aufgefaßt werden, die kompakte Schreibweise ist nach Division der ersten Gleichung durch c

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \mu_0 j^\nu. \quad (8.64)$$

Zunächst wollen wir dem bisher beschrittenen Weg weiter folgen, im nächsten Unterabschnitt erst soll uns der mittlere Ausdruck interessieren. Die Eichinvarianz

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f \quad (8.65)$$

in Analogie zu (8.36) erlaubt die Wahl der Lorentzeichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (8.66)$$

und diese vereinfacht Gleichung (8.64) in

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu. \quad (8.67)$$

8.4.3 Der Feldstärketensor

Der Klammerausdruck in Gleichung (8.64) kann als ein *Vierertensor vom Rang 2* aufgefaßt werden, ähnlich dem metrischen Tensor, der in dieser Gleichung in seiner zweifach kontravarianten Schreibweise in Erscheinung tritt. Wir nennen ihn den *Feldstärketensor* F . Mit ihm schreiben sich die Maxwell'schen Gleichungen bereits vor der Einführung einer Eichung in kompakter Form,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (8.68)$$

Wir können die einzelnen Komponenten dieses Feldstärketensors bestimmen. Zunächst erkennt man, daß F in seinen beiden Indizes antisymmetrisch ist. Es brauchen also nur sechs der sechzehn Komponenten bestimmt zu werden. So ergibt sich

$$\begin{aligned} F^{0i} &= \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c} \nabla \varphi = -\frac{1}{c} E_i \quad (i = x, y, z) \\ F^{12} &= -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -B_x \\ F^{13} &= -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} = B_y \\ F^{23} &= -\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} = -B_z \end{aligned} \quad (8.69)$$

und damit

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.70)$$

Stichwortverzeichnis

Äquipotentialfläche	20
Ampère, André Marie	36
Ampèremeter	43
Ampèresches Gesetz	52
aperiodischer Grenzfall	66
Atommodell, Bohrsches	72
Ausrichtung eines Dipols	29
Austauschwechselwirkung	78
avancierte Lösung	92
Barkhausen-Effekt	79
Beweglichkeit	38
Bildladung	23
Biot, Jean Baptiste	54
Biot-Savartsches Gesetz	55
Blindwiderstand	68
Bohrsches Atommodell	72
Charakteristiken, (Methode der)	85
charakteristische Gleichung	65
Clausius-Masotti-Gleichung	33
Coulomb, Charles Augustin de	5
Coulomb-Eichung	54,91
Coulombsches Gesetz	5
Curie-Temperatur	75,78
d'Alembert-Operator	95
Diamagnetismus	72,75
Dielektrikum	27
Dielektrizität	32
Dielektrizitätskonstante	5
Differential	95
Dipol, Hertzscher	88
Dipolmoment, elektrisches	28
Dipolmoment, magnetisches	55
Dipolmomentendichte, elektrische	30
Dipolmomentendichte, magnetische	76
Dirichletsches Randwertproblem	21
Divergenz	14
Domänen/Domänenwände	78
Drehmoment	29
Driftgeschwindigkeit	38
Eichfreiheit	53
Eichinvarianz	90
Eichung	53
Eichung, Coulomb-	54,91
Eichung, Lorentz-	91

Eigenwertgleichung	65
eingeschwungener Zustand	67
Einstein, Albert	46
Einsteinsche Summenkonvention	94
Einstellenergie eines Dipols	29
elektrisches Feld	6
Elektrisiermaschinen	5
elektromagnetisches Feld	83
Elektrometer	21
Elementarmagnete	72
Energie des elektrischen Feldes	13,18
Energie des elektrischen Feldes mit Materie	34
Energie eines Kondensators	25
Energie des magnetischen Feldes	57
Energie des magnetischen Feldes mit Materie	80
Energie einer Spule	64
Energiedichte des elektromagnetischen Feldes	83
Energiestromdichte	83
Faraday, Michael	6
Faradaysches Induktionsgesetz	81
Faradayscher Käfig	21
Feld, elektrisches	6
Feld, elektromagnetisches	83
Feld, freies magnetisches	77
Feld, konservatives	11,18
Feld, magnetisches	51
Feldelektronenmikroskop	22
Feldlinien	6
Feldstärketensor	96
Fernwirkungsgesetz	5
Ferromagnetismus	72,75,78
Flächenladungsdichte	6
Flächenstromdichte	76
Fluß	8
Fluß, elektrischer	8
Fluß, magnetischer	51
Franklin, Benjamin	5
freie Ladung	31,33
freies magnetisches Feld	77
freier Strom	76
Gauß, Carl Friedrich	8
Gaußscher Satz	8,14
gebundene Ladung	31
gebundener Strom	76
Gegeninduktivität	62
Geschwindigkeitsfeld	8

Gradient	16
Greenscher Satz	18
Grenzfall, aperiodischer	66
gyromagnetisches Verhältnis	72
Halbleiter	35
harmonische Funktion	17
Heavyside, O.	83
Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von	59
Helmholtzspule	59
Henry, Joseph	62
Hertz, Heinrich Rudolf	87
Hertzscher Dipol	88
Hochpaß	70
homogene Ladungsverteilung	7
Hysteresekurve	79
Induktionsbremse	61
Induktionsgesetz, Faradaysches	81
Induktionsspannung	59
Induktivität, Gegen-	62
Induktivität, (Selbst-)	63
Influenz, elektrostatische	21
Innenwiderstand	43
Kapazität	24
Kausalität	92
Kirchhoff, Gustav Robert	41
Kirchhoffsche Gesetze	41
Knotenregel	41
Koerzitivfeldstärke	79
Kondensator, (Platten-)	24
Kondensator, Energie	25
Kondensator, Parallelschaltung/Serienschaltung	26
konservatives Feld	11,18
Kontinuitätsgleichung	37
kontravariante Form eines Vierervektors	94
konventionelle Stromrichtung	36
kovariante Form eines Vierervektors	94
Kreisstrom	55
Kriechfall	66
Ladung, elektrische	5
Ladung, freie und gebundene	31
Ladungsdichte	6
Ladungsverteilung, homogene	7
Lamorfrequenz	74
Laplace-Operator	17
Laplacegleichung	21
Laue, Max Felix Theodor von	22

Lecher, E.	89
Lecher-Leitung	89
leichte Richtungen	78
Leistung des elektrischen Stroms	71
Leiter	35
Leitfähigkeit	38
Leitungsband	19
Lenzsche Regel	61
Linienladungsdichte	6
Lorentzzeichnung	91
Lorentzkraft	50
Lorentztransformation	47
magnetisches Feld	51
magnetisches Feld, freies	77
Magnetisierung	76
Magnetisierungskatastrophe	77
Maschenregel	41
Masotti-Gleichung, Clausius-	33
Maxwell, James Clerk	81
Maxwellsche Gleichungen	81ff
Meßbereichserweiterung	44
metrischer Tensor	94
Mikrowellensender	89
Minkowskiraum	94
Nabla-Operator	17
Ohm, Georg Simon	39
Ohmsches Gesetz	39
Ohmsches Gesetz, verallgemeinertes	68
Parallelschaltung von Kondensatoren	26
Parallelschaltung von Widerständen	41
Paramagnetismus	72,75
Permeabilität	77
Permeabilitätskonstante	52
Phase einer Schwingung	67
Poissongleichung	18
Polarisation	30
Polarisation, zirkuläre	89
Potential, (skalares)	11,89
Potential, Vektor-	53,89
Potentialvierervektor	95
Poynting, J.H.	83
Poyntingvektor	83
Primärspule eines Transformators	62
Punktladung	6
Quadrupolmoment	29
Raumladungsdichte	6

Relativitätstheorie, spezielle	46
Remanenz	79
Resonanzfrequenz	69
Resonanzkatastrophe	68
retardierte Lösung	92
Rotation	15
Sättigung der Magnetisierung	79
Schwingfall	66
Sekundärspule eines Transformators	62
Selbstinduktivität	63
Separationsansatz	85
Serienschaltung von Kondensatoren	26
Serienschaltung von Widerständen	41
Sextupolmoment	29
skalares Potential	89
Spannung, elektrische	24
Spannung, Induktions-	59
Spule, Energie	64
stationärer Strom	53
stehende Welle	85
Stokes, Sir George Gabriel	15
Stokesscher Satz	15
Strom, freier	76
Strom, gebundener	76
Strom, stationärer	53
Stromdichte, elektrische	37
Stromrichtung, konventionelle	36
Stromstärke, elektrische	36
Stromvierervektor	95
Summenkonvention, Einsteinsche	94
Superpositionsprinzip	6
Suszeptibilität, elektrische	32
Tensor, metrischer	94
Tesla, Nicola	51,86
Tesla-Transformator	86
Tiefpaß	70
Toroidspule	63
Transformator	62
Transformator, Tesla-	86
Transformator, Trenn-	62
Trenntransformator	62
Trennung der Veränderlichen	85
Unipolarinduktor	61
Vektorfeld	6
Vektorpotential	53
Verschiebungsdichte, elektrische	33

Verschiebungsstrom	82
Verschiebungsstromdichte	81
Vierertensor vom Rang 2	96
Vierervektor	94
Vierervektor des Stroms/des Potentials	95
Vierpoltheorie	63
virtuelle Verrückung	25
Volta, Graf Alessandro	11
Voltmeter	43
Weber, Wilhelm Eduard	51
Wechselspannungsquelle	67
Weißsche Bezirke	78
Wellenvektor	86
Wheatstonesche Brücke	43
Widerstand, elektrischer/spezifischer	39
Widerstand, Innen-	43
Widerstand, Parallelschaltung/Serienschaltung	41
Widerstand, Wirk-/Blind-	68
Wirkwiderstand	68
Zirkulation	14

Verzeichnis der Naturkonstanten

Dielektrizitätskonstante: $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2 s^2}{kg m^3}$

Permeabilitätskonstante: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{kg m}{C^2}$

Lichtgeschwindigkeit: $c = 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

Verzeichnis der Einheiten

Zur Länge (in m), Zeit (in s) und Masse (in kg) tritt als vierte Grundgröße die Stromstärke, Allerdings soll hier die Ladung (in Coulomb, C) anstelle der Stromstärke wie eine Grundgröße behandelt werden.

(Raum-)Ladungsdichte: $[\rho] = 1 \frac{C}{m^3}$	Stromdichte: $[\vec{j}] = 1 \frac{C}{m^2 s}$	Stromvierervektor: $[j^\mu] = 1 \frac{C}{m^2 s}$
skalares Potential: $[\varphi] = 1 \frac{kg \ m^2}{C \ s^2}$	Vektorpotential: $[\vec{A}] = 1 \frac{kg \ m}{C \ s}$	Potentialvierervektor: $[A^\mu] = 1 \frac{kg \ m}{C \ s}$
elektrische Feldstärke: $[\vec{E}] = 1 \frac{kg \ m}{C \ s^2}$	magnetische Feldstärke: $[\vec{B}] = 1 \frac{kg}{C \ s} = 1 T$ (Tesla) magnetischer Fluß: $1 W = 1 T m^2$ (Weber)	Feldstärketensor: $[F^{\mu\nu}] = 1 \frac{kg}{C \ s} = 1 T$
Kapazität: (Faraday) $[C] = 1 \frac{C^2 s^2}{k \ m^2} = 1 F$	Induktivität: (Henry) $[L] = 1 \frac{kg \ m^2}{C^2} = 1 H$	Energiedichte: $[w] = 1 \frac{kg}{m \ s^2}$
Polarisation und Verschiebungsdichte: $[\vec{P}] = [\vec{D}] = 1 \frac{C}{m^2}$	Magnetisierung und freie magn. Feldstärke: $[\vec{M}] = [\vec{H}] = 1 \frac{C}{m \ s}$	Poyntingvektor oder Energiestromdichte $[\vec{S}] = 1 \frac{kg}{m \ s^2}$
Spannung: (Volt) $[U] = 1 \frac{kg \ m^2}{C \ s^2} = 1 V$	Stromstärke: (Ampère) $[I] = 1 \frac{C}{s} = 1 A$	Widerstand: (Ohm) $[R] = 1 \frac{kg \ m^2}{C^2 s} = 1 \Omega$