

**Themengebiet Optik  
entnommen der  
Vorlesung zur Physik III**

**gehalten von**

**Prof. Dr. Konrad Kleinknecht  
und Prof. Dr. Ewald Reya  
im Wintersemester 1984/85  
an der Universität Dortmund**

**herausgegeben von Stefan Groote**

## Vorwort

Das vorliegende Skript zur Optik entstammt einer Vorlesung zur „Physik III“, die von Herrn Prof. Konrad Kleinknecht\* und Herrn Prof. Ewald Reya\*\* im Wintersemester 1984/85 an der Universität Dortmund im Wechsel gehalten wurde. Dieser Wechsel beruht auf einem der Grundprinzipien der integrierten Anfängerkurse zur Physik an der Universität Dortmund, welche den Studierenden sowohl die experimentellen wie auch die theoretischen Aspekte in gleicher Weise vor Augen führen sollen. Da jedoch in diesem Semester noch andere Themen, u.a. der gesamte Bereich der Lagrangeschen Mechanik, zu behandeln war, kam die Optik dabei etwas zu kurz. Ich habe mich daher bemüht, an einigen Stellen ausführlicher zu sein, als es die Vorlesenden konnten.

Mainz, im September 1998

Stefan Groote\*\*\*

## Literaturhinweise

- L. Bergmann und Cl. Schaefer, „Lehrbuch der Experimentalphysik“, III. Band „Optik“ (de Gruyter, Berlin 1974)
- Berkeley Physics Course, Vol. III (McGraw Hill, New York 1965)
- Richard P. Feynman, “The Feynman Lectures on Physics”, Vol. II: Mainly Electromagnetism and Matter (Massachusetts 1964)
- Christian Gertsen, Hans O. Kneser, Helmut Vogel, „Physik“ – ein Lehrbuch zum Gebrauch neben den Vorlesungen (Springer, Berlin 1989)
- J.D. Jackson, “Classical Electrodynamics” (Wiley, New York 1982) oder J.D. Jackson, „Klassische Elektrodynamik“ (de Gruyter, Berlin 1983)

© Eine Produktion des christlichen Buchverlages Groote & Reiß

---

\* Institut für Physik der Johannes-Gutenberg-Universität,  
Arbeitsgruppe experimentelle Teilchenphysik (ETAP), 55099 Mainz

\*\* Lehrstuhl für Theoretische Physik IV der Universität,  
Postfach 500500, 44221 Dortmund

\*\*\* Institut für Physik der Johannes-Gutenberg-Universität,  
Arbeitsgruppe theoretische Teilchenphysik (ThEP), 55099 Mainz

## Optik

Die Optik ist eine der ältesten und zugleich eine der jüngeren physikalischen Disziplinen. Waren Phänomene der geometrischen Optik bereits im Altertum bekannt und wurden von den antiken Kulturen untersucht, so ist erst im 20. Jahrhundert die ganze Bandbreite des Spektrums elektromagnetischer Wellen bis hin zum Radiofrequenzbereich erkannt und erforscht worden. Zugleich zeigte der Dualismus zwischen Welle und Teilchen den Weg in ein neues Naturverständnis auf. In diesem Sinne wird in der Optik wohl der Übergang von der klassischen zur Quantenmechanik am deutlichsten sichtbar und erfahrbar.

Auch wenn heutzutage mit der Quantenelektrodynamik ein theoretisches Modell zur Verfügung steht, das die Phänomene der elektromagnetischen Wechselwirkung in sich konsistent beschreibt, ist aufgrund der historischen Entwicklung, aber auch aufgrund praktischer Erwägungen eine vielschichtige Beschreibungsweise vorzuziehen. Wir unterscheiden je nach Energie der Strahlung und dem Verhältnis zwischen der Wellenlänge und den räumlichen Abmessungen der bestrahlten Strukturen drei verschiedene Bereiche der Optik:

**Geometrische Optik:** Die geometrische Optik ist anwendbar, wenn die Energie der einzelnen Strahlungsteilchen (Photonen) klein gegenüber der Nachweisempfindlichkeit der Apparatur und die Wellenlänge klein gegenüber der Dimension der Objekte ist. Die geometrische Optik beschreibt die Ausbreitung von Lichtstrahlen.

**Wellenoptik:** Auch hier ist die Photonenenergie klein gegenüber der Nachweisempfindlichkeit. Jedoch kommt hier die Wellenlänge in dem Bereich der räumlichen Strukturen, auf welche die Strahlung fällt. Die Wellenoptik beschreibt Beugungs- und Interferenzerscheinungen und bestimmt damit charakteristische Eigenschaften wie das Auflösungsvermögen einer optischen Apparatur.

**Quantenoptik:** Ist die Energie  $h\nu$  des einzelnen Strahlungsteilchens so groß, daß sie von dem Nachweisgerät aufgelöst werden kann, so gelangt man in den Bereich der quantenmechanischen Beschreibungsweise. Albert Einstein hat 1905 mit Hilfe der Quantenhypothese den Photoeffekt erklären können. Phänomene, die allgemein mittels der Quantenoptik beschrieben werden, sind die Emission und Absorption von Photonen in Atomen und Kernen.

Den ersten beiden Bereichen werden die folgenden Kapitel gewidmet sein, während die Quantenoptik erst im Zusammenhang mit der Quantenmechanik in der Vorlesung „Physik IV“ behandelt werden kann.

## Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort und Literaturhinweise</b> .....	<b>2</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b> .....	<b>4</b>
<b>1. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen</b> .....	<b>5</b>
<b>1.1 Energie- und Impulssatz</b> .....	<b>6</b>
<b>1.2 Wellenausbreitung in Nichtleitern</b> .....	<b>8</b>
<b>1.3 Wellenausbreitung entlang von Leitern</b> .....	<b>9</b>
1.3.1 Die Transmissionslinie .....	10
1.3.2 Randbedingungen für einen perfekten Leiter .....	11
<b>1.4 Der Hohlleiter</b> .....	<b>12</b>
1.4.1 Longitudinales Feld im idealen Hohlleiter .....	13
1.4.2 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit .....	14
1.4.3 Transversales Feld im idealen Hohlleiter .....	15
1.4.4 Versuch zum Hohlleiter .....	17
<b>1.5 Wellenausbreitung in Leitern</b> .....	<b>17</b>
<b>2. Lichtoptik</b> .....	<b>19</b>
<b>2.1 Die Reflexions- und Brechungsgesetze</b> .....	<b>19</b>
2.1.1 Huygenssches Prinzip .....	19
2.1.2 Fermatsches Prinzip .....	20
2.1.3 Snelliussches Brechungsgesetz .....	21
<b>2.2 Polarisation und Totalreflexion</b> .....	<b>22</b>
2.2.1 Die Fresnelschen Formeln .....	22
2.2.2 Der Brewsterwinkel .....	24
2.2.3 Senkrechter Einfall .....	25
2.2.4 Totalreflexion .....	25
2.2.5 Linear- und Zirkularpolarisation .....	26
2.2.6 Doppelbrechung .....	27
<b>2.3 Geometrische Optik</b> .....	<b>28</b>
2.3.1 Der Hohlspiegel .....	28
2.3.2 Die Linse .....	30
2.3.3 Matrixschreibweise der Abbildung .....	32
2.3.4 Bezeichnungen für Linseneigenschaften .....	33
2.3.5 Kombinationen aus Linsen .....	34
<b>2.4 Interferenz</b> .....	<b>34</b>
2.4.1 Vielstrahlinterferenz .....	35
2.4.2 Anwendung: Das Beugungsgitter .....	37
2.4.3 Kohärenz und Laser .....	38
2.4.4 Interferometer und Spektrometer .....	38
<b>2.5 Beugung</b> .....	<b>40</b>
2.5.1 Beugung am Spalt mit senkrechtem Lichteinfall .....	41
2.5.2 Das Babinettsche Theorem .....	42
2.5.3 Beugungstheorie .....	42
<b>Stichwortverzeichnis</b> .....	<b>44</b>

## 1. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

Wie bereits in der Vorlesung „Physik II“ gezeigt wurde, ist die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen eine Konsequenz der Feldgleichungen, die erstmals von James Clerk Maxwell (1831–1879) in geschlossener Form aufgestellt wurden und seither zum Kernbestandteil der Elektrodynamik gehören. Im Rahmen der Optik geht es vor allem um die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in verschiedenen Medien. Daher sollen hier die *materieabhängigen Maxwellschen Gleichungen* an den Anfang gestellt werden,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Dabei ist  $\vec{E}$  die *elektrische Feldstärke*,  $\vec{D}$  die *elektrische Verschiebungsdichte* oder *freie elektrische Feldstärke*,  $\vec{B}$  die *magnetische Feldstärke* und  $\vec{H}$  die *freie magnetische Feldstärke*. Der Begriff „frei“ bezieht sich in diesem Zusammenhang darauf, daß diese Größen, wie zu erkennen ist, über die Maxwellschen Gleichungen an die äußeren, also nicht durch die Felder selbst induzierten, freien Ladungen und Stromdichten gekoppelt sind. Zwischen freien und effektiven Feldstärken bestehen die Zusammenhänge

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{und} \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (1.2)$$

mit der *Polarisation*  $\vec{P}$  und der *Magnetisierung*  $\vec{M}$ .

Die *Dielektrizitätskonstante*  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ s}^2 / \text{kg m}^3$  und die *Permeabilitätskonstante*  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ kg m/C}^2$  sind Naturkonstanten (der erstaunliche, mathematisch anmutende Wert für  $\mu_0$  röhrt daher, daß diese Konstante in die Definition der Stromstärkeneinheit eingeht, die im internationalen Einheitsystem eine Grundeinheit ist). In den meisten Medien wird die Polarisation bzw. Magnetisierung, welche durch die angelegten Felder induziert wird, proportional zu diesen Feldern. Der Proportionalität wird durch die *elektrische* bzw. *magnetische Suszeptibilität* ein expliziter Ausdruck verliehen,

$$\vec{P} = \chi_E \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{und} \quad \vec{M} = \chi_M \vec{H} \quad (1.3)$$

(Daß in der zweiten Beziehung die freie magnetische Feldstärke benutzt wird, hat historische Gründe). Für alle Medien, in denen diese Proportionalität gegeben ist, lassen sich die Gleichungen (1.2) und (1.3) zusammenfassen zu

$$\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_E) \vec{E} =: \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \mu_0(1 + \chi_M) \vec{H} =: \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (1.4)$$

und die neu eingeführten Größen sind die *Dielektrizität*  $\epsilon$  und die *Permeabilität*  $\mu$ , beides materialabhängige Größen.

## 1.1 Energie- und Impulssatz

Das elektromagnetische Feld vermag auf geladene Materie mechanisch Energie und Impuls zu übertragen. Das bemerkte der Physiker J.H. Poynting bereits 1884. Diese Übertragung lässt sich mit Hilfe der *Lorentzkraft*

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (1.5)$$

mit der das elektromagnetische Feld auf eine Punktladung  $q$  wirkt, beschreiben und nach und nach durch reine Feldgrößen ausdrücken. Dies wollen wir hier vollziehen. Die *Leistung*, also die mechanische Arbeit pro Zeiteinheit, ist gegeben durch

$$\frac{dE_{\text{mech}}}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} = q\vec{v} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q\vec{v} \cdot \vec{E}. \quad (1.6)$$

Hier fällt, wie auch nicht anders zu erwarten, die Wirkung des magnetischen Feldes zunächst heraus. Das elektrische Feld hingegen erzeugt einen elektrischen Strom, indem es die Ladung beschleunigt. Gehen wir nun zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung über, so ist diese Leistung zu ersetzen durch

$$\frac{dE_{\text{mech}}}{dt} = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3x. \quad (1.7)$$

An dieser Stelle beginnt die Umstellung auf reine Feldgrößen. Denn der erzeugte Strom ruft wiederum ein magnetisches Feld hervor. Wir setzen für  $\vec{j}$  die passende Maxwellsche Gleichung ein und erhalten

$$\frac{dE_{\text{mech}}}{dt} = - \int_V \vec{E} \cdot \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \nabla \times \vec{H} \right) d^3x. \quad (1.8)$$

Als nächstes wird sowohl bezüglich der räumlichen wie der zeitlichen Ableitung eine partielle Integration vollzogen, um nachher das Integral reduzieren zu können. Zu beachten ist

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) &= \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}), \\ \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) &= 2\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + 2\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{mech}}}{dt} &= - \int_V \left( \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \right) d^3x = \\ &= - \int_V \left( \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \right) d^3x = \\ &= - \int_V \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \right) d^3x = \\ &= - \frac{d}{dt} \int_V w_{EM} d^3x - \oint_O (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{a} = - \frac{dE_{EM}}{dt} - \oint_O \vec{S} \cdot d\vec{a} \quad (1.9) \end{aligned}$$

mit der *Energiedichte*

$$w_{EM} = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad (1.10)$$

des elektromagnetischen Feldes und der *Energieflußdichte*

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (1.11)$$

(auch als *Poyntingscher Vektor* bekannt) unter Verwendung des Gaußschen Satzes. Zusammenfassend bedeutet die Gleichung (1.9), daß die Summe aus mechanischer und elektromagnetischer Energie sich in dem Maße verringert, in dem ein Energiefluß nach außen erfolgt.

Auch die Impulsübertragung des elektromagnetischen Feldes können wir durch reine Feldgrößen ausdrücken. Der Impulsübertrag pro Zeiteinheit ist einfach die *Kraft*, hier ist also direkt die Lorentzkraft aus Gleichung (1.5) zu verwenden. Wird erneut die Ladung durch eine kontinuierliche Ladungsverteilung ersetzt, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_{\text{mech}}}{dt} &= \int_V (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) d^3x = \\ &= \int_V \left( \vec{E}(\nabla \cdot \vec{D}) + \vec{B} \times \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \nabla \times \vec{H} \right) \right) d^3x. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Zu beachten ist hier

$$\vec{B} \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} \times \vec{D}) + \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} \times \vec{D}) - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E})$$

sowie ferner

$$\begin{aligned} (\vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}))_i &= \varepsilon_{ijk} D_j \varepsilon_{klm} \frac{\partial E_m}{\partial x_l} = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) D_j \frac{\partial E_m}{\partial x_l} = \\ &= D_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i} - D_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (E_j D_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} (E_i D_j) + E_i \frac{\partial D_j}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Der letzte Term fällt, in Gleichung (1.12) eingesetzt, gegen den ersten Term heraus. Gleiches ergibt sich für den dritten Term, wobei ein analoger Ausdruck mit  $\partial B_j / \partial x_j$  aufgrund der Maxwellschen Gleichungen erst gar nicht in Erscheinung tritt. Führt man als neue Größen also die *Impulsdichte*

$$\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B} \quad (1.13)$$

und den *Maxwellschen Spannungstensor*  $T$  mit den Komponenten

$$T_{ij} = E_i D_j + H_i B_j - u_{EM} \delta_{ij} \quad (1.14)$$

ein, so schreibt sich Gleichung (1.12) schließlich in der Form

$$\frac{d\vec{p}_{\text{mech}}}{dt} = \int_V \left( -\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \right) d^3x = -\frac{d}{dt} \int_V \vec{g} d^3x + \oint_O \vec{e}_i T_{ij} da_j. \quad (1.15)$$

In Medien, die eine Linearität zwischen freiem und effektivem Feld gemäß Gleichungen (1.4) zeigen, ist die Impulsdichte proportional zur Energiestromdichte, wobei die Proportionalität durch  $\vec{g} = \epsilon\epsilon_0\mu\mu_0\vec{S}$  gegeben ist. Da diese Proportionalität damit jedoch für jedes Medium anders ausfällt, ist es sinnvoll, diese beiden Dichten unabhängig voneinander zu definieren. Gleichung (1.15) drückt aus, daß sich die Änderung des Gesamtimpulses in einer „Verspannung“, also einer Deformation der Ladungsverteilung äußert.

Eine Anmerkung zum Abschluß, die etwas über den Rahmen hinausgreift. Die beiden Gleichungen (1.9) und (1.15), die eigentlich vier Gleichungen darstellen, lassen sich in einer relativistisch kovarianten Form schreiben. Aus der Vorlesung „Physik II“ wissen wir bereits, daß sich Energie und Impuls zu einem Impulsvierervektor zusammenfassen lassen, der die Transformationseigenschaften eines Vektors im vierdimensionalen Minkowskiraum besitzt. Wir integrieren nun die Gleichungen über die Zeit und fassen die rechten Seiten entsprechend zu einem vierdimensionalen Tensor zweiter Stufe zusammen, dem *elektromagnetischen Viererspannungstensor*  $T = (T^{\mu\nu})$ ,

$$p_{\text{mech}}^\mu = - \oint T^{\mu\nu} da_\nu, \quad (1.16)$$

wobei  $da_\nu$  die Komponente des differentiellen Oberflächenvierervektors der dreidimensionalen Hyperfläche in Richtung der Koordinate  $x^\nu$  darstellt, dessen Maß aus dem vierdimensionalen durch Fortlassen des Differentials  $dx^\nu$  gebildet wird, also  $d^4x = dx^\nu \wedge da_\nu$  (keine Summation).  $T$  setzt sich zusammen aus

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}), & T^{0j} &= (\vec{E} \times \vec{H})_j, \\ T^{i0} &= (\vec{D} \times \vec{B})_i, & T^{ij} &= E_i D_j + H_i B_j - \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Dieser vierdimensionale Spannungstensor wird in der allgemeinen Relativitätstheorie als Inhomogenität der Gravitationsgleichung wieder auftreten.

## 1.2 Wellenausbreitung in Nichtleitern

Die Wellengleichungen für das Vakuum sind bereits im Rahmen der Vorlesung „Physik II“ aufgestellt und gelöst worden. Die Wellengleichungen für homogene und isotrope Nichtleiter sind diesen von der Struktur sehr ähnlich. Denn für diese Medien lassen sich die Gleichungen (1.4) verwenden und zugleich ausnutzen, daß keine freien Ladungen oder Ströme existieren. Setzt man ferner voraus, daß die Dielektrizität und Permeabilität zeitlich konstante Materialgrößen sind, so kann man die sich ergebenden Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0, & \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (1.17)$$

durch wechselseitiges Einsetzen entkoppeln, man erhält zwei strukturell gleiche Differentialgleichungen

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{B} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (\Delta = \nabla \cdot \nabla) \quad (1.18)$$

für die jeweils drei Vektorkomponenten, also sechs Gleichungen derselben Form

$$\Delta \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (1.19)$$

wobei wir

$$v := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad (1.20)$$

verwendet haben. Löst man diese Gleichungen und vergleicht die Lösung mit derjenigen für das Vakuum, so erkennt man, daß an die Stelle der Lichtgeschwindigkeit  $c$  der Parameter  $v$  tritt, der sich somit als Geschwindigkeit der elektromagnetischen Welle im Nichtleiter entpuppt. Da die Ferromagnete nicht zu den Nichtleitern zählen, kann zusätzlich  $v \approx c/\sqrt{\varepsilon}$  genähert werden. Die Lösung indes wollen wir hier nicht erneut vollziehen, stattdessen aber daran erinnern, daß das elektrische und das magnetische Feld sowohl aufeinander wie auf der Ausbreitungsrichtung senkrecht stehen. Diese Ausbreitungsrichtung ist durch den *Wellenvektor*  $\vec{k}$  beschrieben, und zwischen ihm und der *Kreisfrequenz*  $\omega$  besteht die Beziehung

$$\omega^2 = v^2 \vec{k}^2 = \frac{c^2 \vec{k}^2}{\varepsilon \mu}. \quad (1.21)$$

Diese Gleichung ist die einfachste Ausführung einer *Dispersionsrelation*, von der wir noch einige weitere kennenlernen werden.

### 1.3 Wellenausbreitung entlang von Leitern

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen entlang von elektrischen Leitern unterscheidet sich grundsätzlich von derjenigen in Nichtleitern, da diese Leiter der Wellenausbreitung spezielle Randbedingungen auferlegen. Eine Ausbreitung entlang solcher sogenannter *Wellenleiter* erfordert jedoch eine entsprechend hohe Frequenz, denn der Verschiebungsstrom  $\vec{j}_D = \partial \vec{D} / \partial t$  ist essenziell wichtig für die Entstehung elektromagnetischer Wellen, das elektrische Feld muß also genügend stark zeitlich wechseln. Aus diesem Grund werden Wellenleiter heute vornehmlich zur analogen und digitalen Signalübertragung in Computernetzwerken und zur hochfrequenten Energieübertragung in Beschleunigern und im Radar eingesetzt. Die hochfrequente Signalübertragung wird allerdings bereits teilweise durch die Glasfasertechnologie bewerkstelligt. Ohne Wellenleiter ergeben sich zwei gravierende Nachteile:

- Energieverlust bei der Übertragung
- Übersprechen (“cross talk”) von einem Kabel zum nächsten

Für die verschiedenen Frequenzen und damit Signaltaktzeiten werden verschiedene Wellenleiter eingesetzt:

1. Im MHz-Bereich (Taktzeiten  $\mu s$ ): Flachbandkabel und twisted pair
2. Im GHz-Bereich (Taktzeiten  $ns$ ): Koaxialkabel
3. bei höchsten Frequenzen: Hohlleiter (Koaxialkabel ohne Innenleiter)

Die verschiedenen Typen von Wellenleitern sind in Abbildung 1.1 dargestellt.

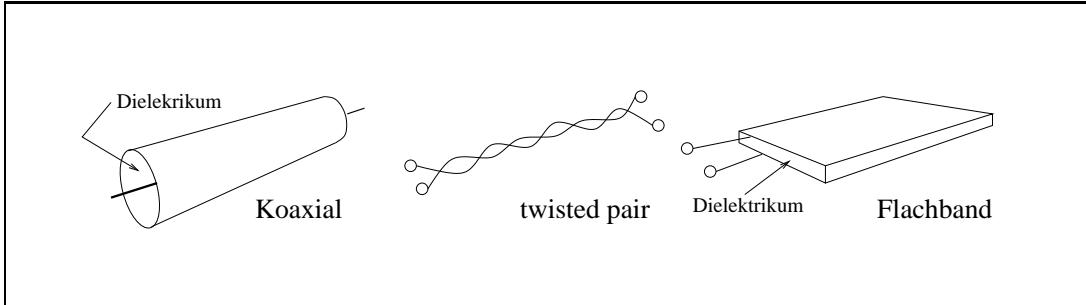


Abb. 1.1 Verschiedene Typen von Wellenleitern

### 1.3.1 Die Transmissionslinie

Als erstes Beispiel soll uns die *Transmissionslinie* als Modell für die einfachste Art eines Wellenleiters dienen. Sie ist im Gegensatz zu dem, was später noch kommen wird, ohne Verwendung der Maxwellsschen Gleichungen zu behandeln. Wie in der nebenstehenden Abbildung 1.2 verdeutlicht, wird sie durch die Beziehung zwischen Spannungen und Strömen entlang der Transmissionslinie gekennzeichnet, wobei der untere Leiter gerdet sein soll.

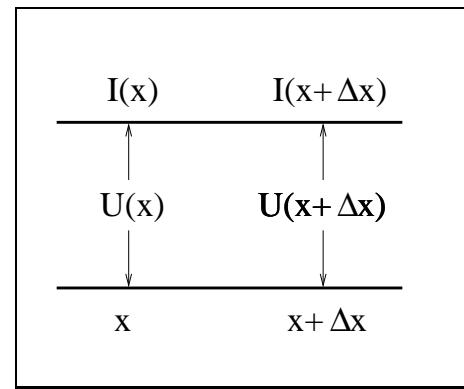


Abb. 1.2 Transmissionslinie

Als Materialgrößen führen wir die Kapazität  $C_0$  und die Induktivität  $L_0$  pro Längeneinheit ein. Die Spannungsdifferenz zwischen den Orten  $x$  und  $x + \Delta x$  entlang der Transmissionslinie sorgt zum einen für einen Stromfluß, es gilt

$$\Delta U = U(x + \Delta x) - U(x) = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -L_0 \Delta x \cdot \frac{dI}{dt}. \quad (1.21)$$

Andererseits wird die Spannung aber gerade durch die auf der Leitung liegende Ladung hervorgerufen,  $Q = C \cdot U = C_0 \Delta x \cdot U$ , deren zeitliche Veränderung über

$$\Delta I = I(x + \Delta x) - I(x) = -\frac{dQ}{dt} = -C_0 \Delta x \cdot \frac{dU}{dt} \quad (1.22)$$

mit der Differenz zwischen den Stromstärken an den verschiedenen Punkten entlang der Transmissionslinie zusammenhängt. Im Grenzfall  $\Delta x \rightarrow 0$  lässt sich aus diesen beiden Gleichungen ein Differentialgleichungssystem konstruieren, welches die Transmission beschreibt,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}, \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (1.23)$$

Ineinander eingesetzt ergibt sich

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \quad (1.24)$$

Diese strukturgleichen Wellengleichungen lassen sich allgemein beispielsweise durch die Methode der Charakteristiken lösen, für die Spannung  $U$  ergibt sich damit

$$U(x, t) = U_1(x - vt) + U_2(x + vt) \quad \text{mit} \quad v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}, \quad (1.25)$$

wobei  $U_1$  und  $U_2$  zweifach differenzierbare Funktionen sind. Für die spezielle Lösung

$$U(x, t) = U_0 \sin(kx - \omega t)$$

mit  $\omega = k \cdot v$  wollen wir die Stromstärke berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{L_0} \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{k U_0}{L_0} \cos(kx - \omega t) \quad \text{und damit durch Integration} \\ I(x, t) &= \frac{k U_0}{\omega L_0} \sin(kx - \omega t) = \frac{k}{\omega L_0} U(x, t) =: \frac{U(x, t)}{Z}. \end{aligned}$$

Spannung und Stromstärke sind also in Phase, der *Wellenwiderstand*

$$Z = \frac{\omega L_0}{k} = v \cdot L_0 = \frac{L_0}{\sqrt{L_0 C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (1.25)$$

charakterisiert den Wellenleiter. Wird ein Wellenleiter mit einem Ohmschen Widerstand desselben Wertes abgeschlossen, so wird eine Reflexion an diesem Ende vermieden, denn der Strom, der durch diesen Widerstand fließt, erzeugt eine Spannung, die derjenigen gleich ist, die im selben Moment am Ende angekommen ist. Aus ihrer Differenz bildet sich also keine Spannung, die eine zurücklaufende Welle hervorrufen würde.

### 1.3.2 Randbedingungen für einen perfekten Leiter

Ein perfekter Leiter ist ein solcher, der einem Strom keinen Widerstand entgegensetzt, seine Leitfähigkeit ist damit unbeschränkt groß. Das hat zur Konsequenz, daß jede Spannung, die innerhalb des Leiters auftritt und damit jedes elektrische Feld sofort kompensiert wird. Aus der Vorlesung zur „Physik II“ wissen wir nun aber aufgrund des Stokesschen Satzes, daß die Parallelkomponenten des elektrischen Feldes außerhalb und innerhalb einer Leiteroberfläche gleich groß sind (siehe Abbildung 1.3 oben). Für einen perfekten Leiter verschwindet daher die Parallelkomponente des elektrischen Feldes nahe der Oberfläche.

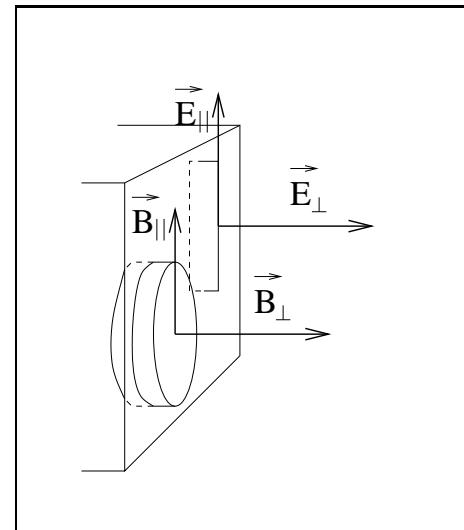


Abb. 1.3 Der perfekte Leiter

Auch für das magnetische Feld ergibt sich für einen perfekten Leiter eine einfache Randbedingung. Legt man einen abgeflachten Zylinder in Gedanken so, daß die eine Fläche innerhalb, die andere außerhalb des Leiters zu liegen kommt, wie in Abbildung 1.3 unten gezeigt, so ergibt der Integralsatz

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

die Gleichheit der Normalkomponenten des magnetischen Feldes innerhalb und außerhalb des Leiters. Das Magnetfeld innerhalb des Leiters induziert im Leiter aber einen Strom, der aufgrund der Lenzschen Regel ein dem angelegten Magnetfeld genau entgegengesetztes Magnetfeld erzeugt, also dieses im Leiter auslöscht. Damit verschwindet die Normalkomponente des Magnetfeldes auch außerhalb des Leiters. Randbedingungen an den Oberflächen perfekter Leiter sind also

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \vec{B}_{\perp} = \vec{0}. \quad (1.26)$$

Für einen *Hohlleiter* wird danach getrachtet, die Eigenschaften eines perfekten Leiter durch Verwendung beispielsweise versilberten Kupfers oder gar eines supraleitenden Materials möglichst gut zu erreichen. Wir wollen daher im folgenden Abschnitt den idealen Hohlleiter diskutieren, welcher den Idealfall dieser Bestrebungen darstellt, dessen metallische Begrenzung der elektromagnetischen Wellenausbreitung also die oben genannten Randbedingungen setzt.

## 1.4 Der Hohlleiter

Die Wellengleichung für den idealen Hohlleiter lässt sich aus der vollständigen Wellengleichung (1.19) zunächst durch Separation der beiden Abhängigkeiten bezüglich der Zeit und der einzigen freien Richtung, die wir als  $z$ -Richtung wählen, vereinfachen. Diese Separation liefert

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{v^2} - k_z^2 \right) \phi(x, y) = 0, \quad (1.27)$$

wobei  $\phi$  erneut für die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes steht. Die abseparierte Funktion beschreibt die Ausbreitung einer ebenen Welle mit Kreisfrequenz  $\omega$  und Wellenzahl  $k_z$  in  $z$ -Richtung und lässt sich für eine vorwärtslaufende Welle als  $\sin(k_z z - \omega t)$  beschreiben. Wie sich nachher noch herausstellen wird, sind die Lösungen der reduzierten Wellengleichung (1.27) nicht eindeutig durch die Randbedingungen gegeben. Um die Schwingungen in sogenannten *Moden* klassifizieren zu können, wird eine zusätzliche Annahme über das globale Verschwinden der  $z$ -Komponente eines der beiden Felder gemacht. Man spricht von ...

- ... *transversal magnetischen Wellen (TM-Mode)*,  
wenn die  $z$ -Komponente des Magnetfeldes verschwindet, und von ...
- ... *transversal elektrischen Wellen (TE-Mode)*,  
wenn die  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes verschwindet.

### 1.4.1 Longitudinales Feld im idealen Hohlleiter

Im folgenden wollen wir uns mit dem TM-Mode befassen und zunächst die Wellengleichung für die  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes lösen. Wir tun auch dies durch eine Separation der Variablen,

$$E_z(x, y) = E_1(x)E_2(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{d^2 E_1}{dx^2}E_2, \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = E_1 \frac{d^2 E_2}{dy^2},$$

also

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_1}{dx^2}E_2 + E_1 \frac{d^2 E_2}{dy^2} + \left( \frac{\omega^2}{v^2} - k_z^2 \right) E_1 E_2 &= 0 \quad \text{oder} \\ \frac{1}{E_1} \frac{d^2 E_1}{dx^2} &= - \left( \frac{\omega^2}{v^2} - k_z^2 + \frac{1}{E_2} \frac{d^2 E_2}{dy^2} \right). \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Funktion von  $x$ , die rechte eine von  $y$ . Daher müssen beide konstant sein, und als Konstante wählen wir  $-k_x^2$ . Dann entkoppelt diese Gleichung zu

$$\frac{d^2 E_1}{dx^2} = -k_x^2 E_1, \quad \frac{d^2 E_2}{dy^2} = - \left( \frac{\omega^2}{v^2} - k_z^2 - k_x^2 \right) E_2 =: -k_y^2 E_2,$$

die allgemeinen Lösungen sind

$$E_1(x) = A_1 \cos(k_x x) + B_1 \sin(k_x x) \quad \text{und} \quad E_2(y) = A_2 \cos(k_y y) + B_2 \sin(k_y y).$$

Nun kommt die Randbedingung ins Spiel. Die  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes verschwindet auf den Begrenzungen des Hohlleiters. Betrachten wir einen Hohlleiter mit rechteckiger Querschnittsfläche der Kantenlängen  $a$  und  $b$  in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung, so können wir als Randbedingungen

$$E_z(0, y) = E_z(a, y) = 0 \quad \text{und} \quad E_z(x, 0) = E_z(x, b) = 0$$

ansetzen. Für die allgemeinen Lösungen bedeutet dies

$$\begin{aligned} E_1(0) = 0 &\Rightarrow A_1 = 0, & E_1(a) = 0 &\Rightarrow B_1 \sin(k_x a) = 0 \Rightarrow k_x a = m\pi, \\ E_2(0) = 0 &\Rightarrow A_2 = 0, & E_2(b) = 0 &\Rightarrow B_2 \sin(k_y b) = 0 \Rightarrow k_y b = n\pi, \end{aligned}$$

wobei  $m$  und  $n$  ganze Zahlen sind. Wir nennen diesen Effekt der Zuordnung ganzer Zahlen zum Wellenvektor eine *Quantisierung* und die Richtung, in der sie auftritt, die *Quantisierungsrichtung*. Im betrachteten Hohlleiter sind diese Quantisierungsrichtungen also durch  $x$  und  $y$  gegeben. So quantisiert, ergibt sich

$$\begin{aligned} E_z(\vec{r}, t) &= E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z - \omega t) \\ \text{mit } k_x &= \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad \text{und} \\ k_z^2 &=: k_{mn}^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - k_x^2 - k_y^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Zu erkennen ist, daß dieser letzte Ausdruck nicht für alle Werte von  $\omega$  positiv ist. Es gibt vielmehr eine *Abschneidefrequenz*

$$\omega_{mn} = \pi v \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad (1.29)$$

für die  $k_{mn}$  verschwindet und unterhalb derer die Wellenzahl imaginär wird. Dies bedeutet, daß der Hohlleiter nur Frequenzen leiten kann, deren Frequenz höher als  $\omega_{mn}$  ist. Ein Hohlleiter wirkt also als *Hochpaß*. Für Frequenzen unterhalb der minimalen Abschneidefrequenz  $\omega_{1,1}$  ist dringend ein Innenleiter erforderlich. Mit diesem Innenleiter sind dann sowohl elektrisches als auch magnetisches Feld transversal, wir sprechen von dem *TEM-Mode*.

### 1.4.2 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Am Beispiel des Hohlleiters lassen sich am besten die verschiedenen Konzepte der Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer und auch anderer Wellenphänomene veranschaulichen. Stellen wir Gleichung (1.28) nach der Kreisfrequenz  $\omega$  um, so erhalten wir

$$\omega = v \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} =: v \cdot k. \quad (1.30)$$

Nun ist alleine die  $z$ -Richtung für die Wellenausbreitung zuständig. Damit aber drifteten die verschiedenen Definitionen für die Ausbreitungsgeschwindigkeit auseinander:

- Die *Wellengeschwindigkeit*

$$v = c / \sqrt{\epsilon \mu}$$

- Die *Phasengeschwindigkeit*

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{k_z} = v \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}{k_z} = v \frac{k}{k_z},$$

sie ist größer als die Wellengeschwindigkeit  $v$ .

- Die *Gruppengeschwindigkeit*

$$v_{\text{Gr}} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{v k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} = v \frac{k_z}{k},$$

sie ist kleiner als die Wellengeschwindigkeit  $v$ .

Vielleicht lassen sich die Bedeutungen und Unterschiede am besten am Beispiel einer schräg durch einen Kanal fließenden Welle veranschaulichen, wie es in Abbildung 1.4 gezeigt ist. Auch im Fall der elektromagnetischen Wellenausbreitung im Hohlleiter läßt sich ein Winkel  $\varphi$  definieren,

$$\sin \varphi = \frac{k_z}{k} = \frac{k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}.$$

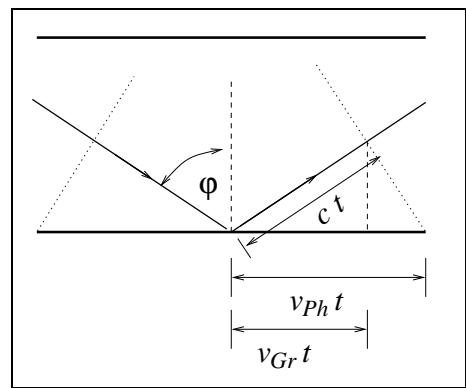


Abb. 1.4 Wellenausbreitung im Kanal

mit dem einzigen Unterschied, daß die Wellenzahl hier in  $x$ - und  $y$ -Richtung quantisiert ist. Bis auf diese Einschränkung gilt aber auch für diesen etwas unanschaulichen Vorgang

$$v_{\text{Ph}} = \frac{v}{\sin \varphi} \quad \text{und} \quad v_{\text{Gr}} = v \sin \varphi.$$

### 1.4.3 Transversales Feld im idealen Hohlleiter

Ist einmal die  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes bestimmt, so ergeben sich für den TM-Mode die anderen Komponenten des elektromagnetischen Feldes über die Maxwellschen Gleichungen. Die Herleitung ist zwar etwas unübersichtlich, soll hier aber dennoch vorgenommen werden, da sie zeigt, an welcher Stelle die Forderung der Transversalität des magnetischen Feldes eingeht. Zunächst einmal genügen die Randbedingungen nicht, um auch  $E_x$  und  $E_y$  eigenständig zu bestimmen. Wir haben aufgrund der Geometrie als Forderungen lediglich  $E_x(x, 0) = E_x(x, b) = 0$  und  $E_y(0, y) = E_y(a, y) = 0$ . Dies ermöglicht uns nur die Bestimmung jeweils einer Quantisierungsrichtung, Lösungen sind also

$$\begin{aligned} E_x(\vec{r}, t) &= (A_x \cos(k_x^x x) + B_x \sin(k_x^x x)) \sin(k_y^y y) \sin(k_z z - \omega t + \alpha_x), \\ E_y(\vec{r}, t) &= \sin(k_x^y x) (A_y \cos(k_y^y y) + B_y \sin(k_y^y y)) \sin(k_z z - \omega t + \alpha_y) \end{aligned}$$

( $k_x^y$  und  $k_y^x$  sind quantisiert). Doch nun kommen die Maxwellschen Gleichungen ins Spiel. So ergibt sich als erste Forderung

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \\ &= k_x^x (-A_x \sin(k_x^x x) + B_x \cos(k_x^x x)) \sin(k_y^y y) \sin(k_z z - \omega t + \alpha_x) + \\ &\quad + k_y^y \sin(k_x^y x) (-A_y \sin(k_y^y y) + B_y \cos(k_y^y y)) \sin(k_z z - \omega t + \alpha_y) + \\ &\quad + k_z E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z - \omega t). \end{aligned}$$

Der Vergleich der verschiedenen funktionalen Abhängigkeiten liefert  $\alpha_x = \alpha_y = \pi/2$ ,  $k_x^x = k_x^y = k_x$ ,  $k_y^x = k_y^y = k_y$  und schließlich noch

$$k_x A_x + k_y A_y = k_z E_0 \quad \text{und} \quad B_x = B_y = 0. \quad (1.31)$$

Dies sind bereits erhebliche Vereinfachungen, es ist

$$\begin{aligned} E_x(\vec{r}, t) &= A_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z - \omega t), \\ E_y(\vec{r}, t) &= A_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z - \omega t), \\ E_z(\vec{r}, t) &= E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z - \omega t). \end{aligned}$$

$A_x$  und  $A_y$  sind noch nicht bestimmt, doch soll uns dies vorerst nicht stören. Wir erhalten das magnetische Feld durch Integration der Gleichung  $\partial \vec{B} / \partial t = v^2 \operatorname{rot} \vec{E}$ ,

$$\begin{aligned} \omega B_x(\vec{r}, t) &= v^2 (k_y E_0 + k_z A_y) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z - \omega t), \\ \omega B_y(\vec{r}, t) &= v^2 (-k_z A_x - k_x E_0) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z - \omega t), \\ \omega B_z(\vec{r}, t) &= v^2 (-k_x A_y + k_y A_x) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z - \omega t). \end{aligned}$$

Die Gleichung  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  ist mit diesen Lösungen trivial erfüllt. Und wenn man erneut die elektrischen Feldkomponenten über  $\partial \vec{E} / \partial t = -\operatorname{rot} \vec{B}$  ausrechnet, so ergibt sich im Vergleich mit den Ausdrücken, von denen wir ausgegangen sind und unter Verwendung von Gleichung (1.30) nur noch einmal (1.31). Wir sind also dazu gezwungen, eine der Komponenten des elektromagnetischen Feldes auf Null zu setzen, und dies sind gerade die eingangs erwähnten TM- und TE-Moden. Für die TM-Mode setzen wir die Amplitude von  $B_z$  auf Null,

$$k_x A_y = k_y A_x \quad \Rightarrow \quad A_x = \frac{k_x k_z E_0}{k_x^2 + k_y^2}, \quad A_y = \frac{k_y k_z E_0}{k_x^2 + k_y^2}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \frac{k_x k_z}{k_x^2 + k_y^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z - \omega t), \\ E_y &= E_0 \frac{k_y k_z}{k_x^2 + k_y^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z - \omega t), \\ E_z &= E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z - \omega t), \\ B_x &= E_0 \frac{k_y \omega}{k_x^2 + k_y^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z - \omega t), \\ B_y &= -E_0 \frac{k_x \omega}{k_x^2 + k_y^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z - \omega t), \\ B_z &= 0. \end{aligned}$$

Obwohl wir in diesem Kapitel mit dem TM-Mode begonnen haben, lässt sich der TE-Mode hier rekonstruieren. Dazu setzen wir  $\omega B_0 = v^2 (k_y A_x - k_x A_y)$  und  $E_0 = 0$ , also

$$k_x A_x + k_y A_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = \frac{k_y \omega B_0}{v^2 (k_x^2 + k_y^2)}, \quad A_y = -\frac{k_x \omega B_0}{v^2 (k_x^2 + k_y^2)}.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{B_0}{v^2} \frac{k_y \omega}{k_x^2 + k_y^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z - \omega t), \\ E_y &= -\frac{B_0}{v^2} \frac{k_x \omega}{k_x^2 + k_y^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z - \omega t), \\ E_z &= 0, \\ B_x &= -B_0 \frac{k_x k_z}{k_x^2 + k_y^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z - \omega t), \\ B_y &= -B_0 \frac{k_y k_z}{k_x^2 + k_y^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z - \omega t), \\ B_z &= B_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z - \omega t). \end{aligned}$$

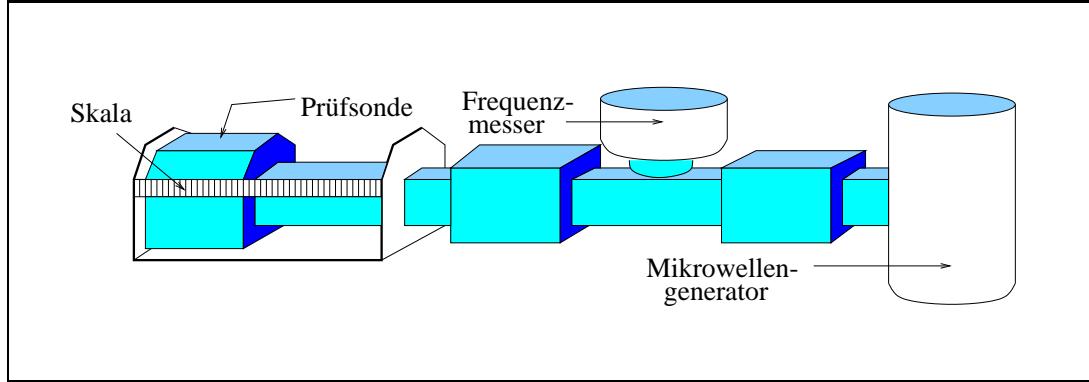


Abb. 1.5 Versuchsaufbau zur Ausmessung eines Hohlleiters

#### 1.4.4 Versuch zum Hohlleiter

Wir wollen die Transmission eines Hohlleiters experimentell vermessen. Dazu dient die Versuchsanordnung, die in Abbildung 1.5 gezeigt ist. Die elektromagnetische Strahlung wird in einem Mikrowellengenerator erzeugt, ihre Frequenz in einem Frequenzmesser gemessen. Der Hohlleiter ist am Ende abgeschlossen, bildet also eine stehende Welle aus. Mit Hilfe einer Prüfsonde wird nun die Leistung der Hohlleiterstrahlung in Abhängigkeit von der an der Skala abzulesenden Länge entlang des Hohlleiters vermessen. Der Hohlleiter besitzt eine Innenausdehnung von  $2 \times 1\text{cm}$  (genauer ist die doppelte Breite  $44,57\text{mm}$ ), als Frequenz kann  $9116\text{MHz}$  abgelesen werden. Wir erhalten

- bei  $118\text{mm}$  ein Maximum
- bei  $105.5\text{mm}$  ein Minimum
- bei  $93.5\text{mm}$  ein Maximum
- bei  $81.5\text{mm}$  ein Minimum und
- bei  $70\text{mm}$  ein Maximum der Leistung.

Der Abstand zwischen Maximum und Minimum der Leistung entspricht einem Wert  $\lambda/4$ . Für die Wellenlänge erhalten wir daher im Mittel  $\lambda = 48\text{mm}$ . Auf Seiten der Theorie ergibt sich aus der Frequenz für den Mode  $\text{TM}_{10}$  ein Wert  $\lambda_{10} = 47.7\text{mm}$ , was sehr nahe unserem Meßergebnis ist.

### 1.5 Wellenausbreitung in Leitern

Wir haben in Abschnitt 1.3.2 den perfekten Leiter betrachtet. Reale Leiter lassen dagegen die elektromagnetische Strahlung in begrenztem Maße eindringen. Es gilt für sie das *Ohmsche Gesetz*, das in differentieller Form die Gestalt

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (1.32)$$

besitzt. Setzt man dies in die Maxwellschen Gleichungen ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{E} &= \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \mu \sigma \vec{E} \end{aligned} \quad (1.33)$$

und damit die Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.34)$$

Diese Gleichung beschreibt eine Wellenausbreitung mit Dämpfung. Wir beseitigen die Zeitabhängigkeit zunächst mit dem Ansatz  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$  und erhalten

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) + (\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \omega^2 + i \mu_0 \mu \sigma \omega) \vec{E}(\vec{r}) = 0. \quad (1.35)$$

Diese Gleichung wiederum wird mit dem Ansatz  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$  gelöst und liefert  $\Delta \vec{E}(\vec{r}) + k^2 \vec{E}(\vec{r}) = 0$ . Der Wellenvektor  $\vec{k}$  ist für nichtverschwindende Leitfähigkeit komplex. Für einen guten Leiter, der durch  $\sigma \gg \varepsilon_0 \varepsilon \omega$  gekennzeichnet ist, lässt sich gar der erste Anteil zu  $k^2$  in Gleichung (1.35) vernachlässigen, es ergibt sich

$$k^2 = i \mu_0 \mu \sigma \omega = e^{i\pi/2} \mu_0 \mu \sigma \omega \Rightarrow \vec{k} = \pm e^{i\pi/4} \vec{n} \sqrt{\mu_0 \mu \sigma \omega} = \pm(1+i)\beta \vec{n}$$

( $\beta := \sqrt{\mu_0 \mu \sigma \omega / 2}$ ), wobei  $\vec{n}$  in Richtung der Wellenausbreitung zeigt. Dies in den Ansatz eingesetzt, ergibt sich die Lösung

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t) = \vec{E}_0 \exp(\pm i(1+i)\beta \vec{n} \cdot \vec{r} - i\omega t) = \\ &= \vec{E}_0 \exp(\mp \beta \vec{n} \cdot \vec{r}) \exp(\pm i\beta \vec{n} \cdot \vec{r} - i\omega t). \end{aligned}$$

Der erste Exponentialfaktor beschreibt die Dämpfung, der zweite die Wellenausbreitung mit der Charakteristik  $\pm \beta \vec{n} \cdot \vec{r} - \omega t$ . Es mag auf den ersten Blick verwundern, daß in beiden Fällen der erste Faktor für eine Dämpfung steht. Beachtet man jedoch, daß die Charakteristik  $\beta \vec{n} \cdot \vec{r} - \omega t$  eine vorwärtslaufende und die Charakteristik  $-\beta \vec{n} \cdot \vec{r} - \omega t$  eine rückwärtslaufende Welle beschreibt, so fällt die Welle im Leiter in eben dieser Richtung ab. Die *Eindringtiefe*  $\delta$  der Strahlung, auch *Skindicke* („Hautdicke“) genannt, ist

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu \sigma \omega}}. \quad (1.36)$$

Kupfer der Leitfähigkeit  $\sigma = 5.9 \cdot 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$  ist selbst bis in höchste Frequenzbereiche hinein als guter Leiter anzusehen. Mit  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} Vs/A m$  und  $\mu \approx 5$  ergibt sich

$$\delta_{Cu}(100Hz) \approx 7mm, \quad \delta_{Cu}(100MHz) \approx 7\mu m.$$

Der *Skineffekt*, also das Eindringen elektromagnetischer Strahlung in Leiter, wird für hohe Frequenzen geringer. In diesem Fall ist die Wellenausbreitung also durch die Oberfläche guter Leiter begrenzt. Daher genügt ein Versilbern der Oberflächen, um ein Eindringen hochfrequenter elektromagnetischer Strahlung in zu schützende Bereiche zu verhindern.

## 2. Lichtoptik

Im vergangenen Kapitel haben wir die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in homogenen Medien betrachtet. Interessanter wird die Ausbreitung allerdings, wenn diese Medien inhomogen sind, also beispielsweise Sprünge in der Dielektrizität oder Permeabilität aufweisen. In diesem Fall ändert sich die Richtung der Ausbreitung an diesen Grenzflächen. Die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen setzen wir in diesem Kapitel mit dem anschaulichen Begriff des *Lichtes* in Beziehung, wenngleich auch Radiowellen oder Strahlung anderer, nicht sichtbarer Frequenzbereiche gemeint sein können.

### 2.1 Die Reflexions- und Brechungsgesetze

Für die Lichtausbreitung existieren zwei verschiedene Modelle. Zum einen existiert natürlich weiterhin das Modell der Welle, vornehmlich der ebenen Welle, das diese Ausbreitung beschreibt. Zum anderen kann die Ausbreitung aber auch mit dem Begriff des *Lichtstrahls* beschrieben werden. Dieser Lichtstrahl steht in gleicher Richtung zum Wellenvektor senkrecht auf den Wellenfronten. Und zu jedem dieser Bilder gibt es ein Prinzip, welches die Lichtausbreitung beschreibt. Diese Prinzipien sollen den Anfang dieses Abschnitts bilden, bevor die gemeinsamen Ergebnisse in Reflexions- und Brechungsgesetzen münden.

#### 2.1.1 Huygenssches Prinzip

Das *Huygenssche Prinzip*, benannt nach den niederländischen Physiker und Astronomen Christian Huygens (1629–1695), geht vom Wellencharakter des Lichtes aus. Genauer beschreibt es die Ausbreitung einer ebenen Welle als einen Prozeß, in dem die einzelnen Punkte einer Wellenfront in jedem Moment im Medium Kugelwellen, die *Huygensschen Elementarwellen*, erzeugen, die sich ausbreiten und schließlich zu der Wellenfront überlagern, wie sie eine Zeitspanne später erscheint. In einem homogenen Medium ist die so erzeugte Wellenfront parallel zur ursprünglichen, da die Ausbreitungsgeschwindigkeit aller Elementarwellen gleich ist, und damit die Ausbreitungsrichtung erhalten. Das ändert sich, wenn die Homogenität nicht mehr gegeben ist.

In Abbildung 2.1 betrachten wir eine ebene Welle, die mit einem *Einfallwinkel*  $\alpha_1$  auf eine Grenzfläche trifft. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  treffe die Welle im Punkt  $A$  die Grenzfläche. Der Punkt  $B$  der Wellenfront erreicht die Grenzfläche im Punkt  $B'$  zu einem späteren Zeitpunkt  $\Delta t$ . Dieser steht mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_1$  des Lichtes im ersten Medium in Beziehung,

$$v_1 \Delta t = d \sin \alpha_1,$$

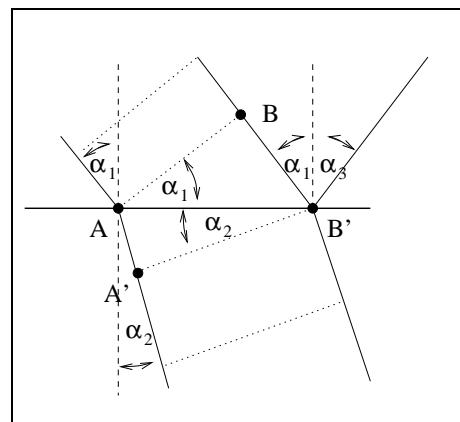


Abb. 2.1 Huygenssches Prinzip

wobei  $d$  die Entfernung zwischen  $A$  und  $B'$  sei. In dieser Zeit hat sich jedoch vom Punkt  $A$  eine Elementarwelle gelöst. Die Geschwindigkeit  $v_2$  im zweiten

Medium ist eine andere, daher legt sie in der Zeit  $\Delta t$  die Strecke  $v_2 \Delta t$  zurück. Zusammen mit der gerade im Punkt  $B'$  erzeugten Elementarwelle und allen anderen Elementarwellen zwischen diesen Punkten bildet sie eine ebene Welle aus, und der *Ausfallwinkel*  $\alpha_2$  ist gegeben durch

$$d \sin \alpha_2 = v_2 \Delta t.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man schließlich

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Zugleich macht Abbildung 2.1 deutlich, daß von  $A$  aus eine Kugelwelle ins bisherige Medium zurückläuft. Diese hat dieselbe Geschwindigkeit wie bisher und errichtet nach der Zeit  $\Delta t$  auf der Grenzfläche ein Dreieck desselben Anstellwinkels. Daher wird in das selbe Medium eine ebene Welle ausgesandt, deren Austrittswinkel gleich dem Eintrittswinkel ist,  $\alpha_3 = \alpha_1$ . Die beiden hier beschriebenen Phänomene sind bestens bekannt als *Brechung* und *Reflexion*.

### 2.1.2 Fermatsches Prinzip

Das *Fermatsche Prinzip* (Pierre de Fermat, 1601–1665, frz. Mathematiker) benutzt das Bild des Lichtstrahles und stellt die Behauptung auf, daß sich dieser Lichtstrahl stets den Weg wählt, auf dem er die kürzeste Zeit braucht. Ist das infinitesimale Wegelement durch  $ds$  und das infinitesimale Zeitintervall durch  $dt$  gegeben, so stehen beide über  $ds = v dt$  in Beziehung. Zu Minimieren ist also die Gesamtzeit

$$\int_{t(P_1)}^{t(P_2)} dt = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v}.$$

Unter der Annahme, daß sich ansonsten das Licht geradlinig ausbreitet, vereinfachen wir das ansonsten recht komplizierte Variationsprinzip durch die Einführung eines einzigen Parameters.

Die Grenzfläche sei in beiden Fällen durch die  $x$ -Achse geben, wie in Abbildung 2.2 gezeigt. Wir beginnen hier mit der Reflexion und betrachten einen Lichtstrahl, der von einem Punkt  $P_1 = (x_1, y)$  zu einem Punkt  $P_2 = (x_2, y)$  gelangen soll, wobei er die Grenzfläche in einem Punkt  $P_0 = (x, 0)$  berühre.  $x$  ist der eingeführte Parameter, bezüglich dessen das Integral zu minimieren ist. Dieses Integral ist hier sofort auszuführen, da die Geschwindigkeit konstant ist,

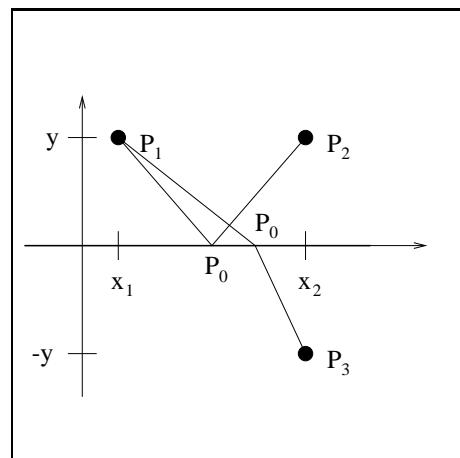


Abb. 2.2 Fermatsches Prinzip

$$v \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} = s(P_1, P_0) + s(P_0, P_2) = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2} + \sqrt{(x_2 - x)^2 + y^2}.$$

Diese Funktion nimmt ihr Minimum für  $x = (x_1 + x_2)/2$ , also genau zwischen den Projektionen der beiden Punkte an. Damit ist klar, daß der Einfall- gleich dem Ausfallwinkel ist.

Für den Übergang in ein anderes Medium wählen wir einen Punkt  $P_3 = (x_2, -y)$  und lassen das Licht erneut bei  $P_1$  starten und bei  $P_0$  die Grenzfläche treffen. Dieser Punkt wird nun natürlich ein anderer sein. Das Integral lässt sich hier in zwei Anteile zerlegen,

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} = \frac{s(P_1, P_0)}{v_1} + \frac{s(P_0, P_2)}{v_2} = \frac{1}{v_1} \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{(x_2 - x)^2 + y^2}.$$

Dieser Ausdruck ergibt, abgeleitet nach  $x$ , die Forderung

$$\frac{x - x_1}{v_1 \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}} = \frac{x_2 - x}{v_2 \sqrt{(x_2 - x)^2 + y^2}},$$

für die Minimalität, was nichts anderes als  $\sin \alpha_1/v_1 = \sin \alpha_2/v_2$  ist. Damit haben wir auch hier ein zum Resultat des ersten Prinzipes identisches Gesetz hergeleitet. Das Fermatsche Prinzip lässt sich übrigens auf komplizierte Anordnungen als ganze anwenden, was beim Huygensschen Prinzip zumindest schwierig wäre.

### 2.1.3 Snelliussches Brechungsgesetz

Wir haben sowohl über das Hygenssche als auch über das Fermatsche Prinzip eine Beziehung zwischen Ein- und Ausfallwinkel erhalten. Für die Reflexion ist diese einfach die Tatsache, daß der Einfall- gleich dem Ausfallwinkel ist. Für die Brechung kommt die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in den verschiedenen Medien mit ins Spiel. Um hier statt den unanschaulichen Geschwindigkeiten eine dimensionslose Größe zu haben, die zudem noch sinnvoll normiert ist, führen wir den *Brechungsindex*  $n = c/v$  ein, der angibt, um welchen Faktor die Wellengeschwindigkeit im Medium kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Mit diesem Brechungsindex können wir das *Snelliussche Brechungsgesetz*

$$n \cdot \sin \alpha = \text{konstant} \tag{2.1}$$

aufstellen. Übrigens wurde dieses Gesetz erst posthum im Nachlaß des niederländischen Mathematikers Willebrord van Royen Snell (1580–1621) entdeckt. Es bildet die Grundlage der Refraktäoptik, also des Zweiges der Optik, der sich mit der Lichtbrechung befaßt. Es gilt strenggenommen nur für ebene Grenzflächen. Doch kann man die meisten in der Praxis vorkommenden Grenzflächen wie die Oberflächen von Linsen als lokal hinreichend eben ansehen, so daß dieses Gesetz zur Geltung kommen kann. Wir machen davon im kommenden Abschnitt bereits Gebrauch und verabschieden uns mit der dort betrachteten Polarisation zugleich endgültig vom explizit elektromagnetischen Charakter des Lichtes.

## 2.2 Polarisierung und Totalreflexion

Zunächst stellt sich wieder einmal die Frage, was die Stetigkeitsbedingungen für das elektrische und magnetische Feld beim Übergang durch eine Grenzfläche sind. Diese Grenzfläche ist hier ein Nichtleiter, der weder freie Ladungen noch Ströme aufweist. Es gelten daher die quellenfreien Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Legen wir, wie bereits mehrfach praktiziert,\* in Gedanken eine flache Dose in die Grenzfläche, so ergeben die beiden linken Gleichungen, daß die Normalkomponenten der Felder  $\vec{D}$  und  $\vec{B}$  beim Durchgang durch die Grenzfläche stetig sind. Der flache Rechteckweg durch die Grenzfläche hingegen liefert mit den beiden rechten Gleichungen die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von  $\vec{H}$  und  $\vec{E}$ . Als zusätzliche Vereinfachung sei die Dielektrizität  $\epsilon$  der aneinanderstoßenden Medien zeitlich und räumlich konstant, die Permeabilität  $\mu = 1$ . Dann gilt

$$\epsilon_1 \vec{E}_{\perp 1} = \epsilon_2 \vec{E}_{\perp 2}, \quad \vec{E}_{\parallel 1} = \vec{E}_{\parallel 2}, \quad \vec{B}_{\perp 1} = \vec{B}_{\perp 2} \quad \text{und} \quad \vec{B}_{\parallel 1} = \vec{B}_{\parallel 2}.$$

Das magnetische Feld geht also stetig durch die Grenzfläche. Es ist über die Maxwellschen Gleichungen mit dem elektrischen Feld gekoppelt, auf das im folgenden die Betrachtungen zurückgeführt werden sollen.

### 2.2.1 Die Fresnelschen Formeln

Das elektromagnetische Feld im Nichtleiter steht senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung, welche anschaulich durch die Richtung des Lichtstrahls gegeben ist. Die relative Orientierung zwischen einfallendem (a), gebrochenem (b) und reflektiertem Strahl (r) ist durch das Snelliussche Brechungsgesetz bzw. das Reflexionsgesetz gegeben. Alle drei Strahlen liegen in einer Ebene senkrecht zur Grenzschicht, die natürlich für senkrechten Einfall nicht eindeutig ist.

Um die eben aufgestellten Grenzbedingungen anwenden zu können, zerlegen wir das elektrische Feld für jeden dieser drei Strahlen in eine Normalkomponente  $E^N$  senkrecht zu dieser Ebene und eine Transversalkomponente  $E^T$ , die in dieser Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung weist. Wellenvektor, Transversal- und Normalkomponente sollen in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, die Situation ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Es ergibt sich

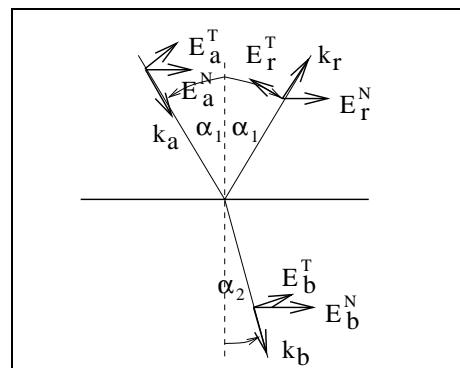


Abb. 2.3 Polarisationsbeziehungen

\* vgl. dazu Abschnitt 1.3.2.

$$E_a^N + E_r^N = E_b^N \quad \text{und} \quad E_a^T \cos \alpha_1 - E_r^T \cos \alpha_1 = E_b^T \cos \alpha_2 \quad (2.3)$$

für die Anteile parallel zur Grenzfläche und

$$\varepsilon_1 (E_a^T \sin \alpha_1 + E_r^T \sin \alpha_1) = \varepsilon_2 E_b^T \sin \alpha_2 \quad (2.4)$$

für denjenigen senkrecht dazu. Verwendet man noch

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}, \quad (2.5)$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} E_a^N + E_r^N &= E_b^N, & (E_a^T - E_r^T) \cos \alpha_1 &= E_b^T \cos \alpha_2, \\ (E_a^T + E_r^T) \sin \alpha_2 &= E_b^T \sin \alpha_1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Diese drei Gleichungen sind zunächst einmal vom Ort und von zwei der drei Ortskoordinaten (beispielsweise  $x$  und  $y$ ) abhängig, wobei die dritte (also  $z$ ) durch die Grenzfläche als  $z = 0$  festgelegt ist. Diese Abhängigkeit ist aber nur eine stationäre, und verwenden wir den komplexen Ansatz

$$\vec{E}_i = \vec{E}_i^0 \exp(i(\omega_i t - k_x^i x - k_y^i y)), \quad i \in \{a, b, r\}$$

so ergibt sich, da die Gleichungen an allen Punkten der Grenzfläche und zu allen Zeiten erfüllt sein soll, die Gleichheit der entsprechenden Kreisfrequenzen und Wellenvektorkomponenten,

$$\omega_a = \omega_b = \omega_r = \omega, \quad k_x^a = k_x^b = k_x^r = k_x \quad \text{und} \quad k_y^a = k_y^b = k_y^r = k_y \quad (2.7)$$

(jedoch nicht für die Komponenten  $k_z^i$ ). Die Gleichungen (2.6) behalten dabei dieselbe Form, egal ob dabei die orts- und zeitabhängigen Feldkomponenten oder deren Amplituden gemeint sind. Wir wollen im folgenden letzteres annehmen. Zu den Übergangsgleichungen für das elektrische Feld treten diejenigen für das magnetische Feld,

$$\begin{aligned} B_a^N + B_r^N &= B_b^N, & (B_a^T - B_r^T) \cos \alpha_1 &= B_b^T \cos \alpha_2 \\ (B_a^T + B_r^T) \sin \alpha_1 &= B_b^T \sin \alpha_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

(man beachte den formalen Unterschied der jeweils letzten Gleichungen in (2.6) und (2.8)). Dabei seien die gleichen Konventionen wie in Abbildung 2.3 getroffen. Diese Gleichungen für das magnetische Feld lassen sich auf das elektrische Feld übertragen, denn aus der homogenen Maxwellschen Gleichung  $\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  ergibt sich für die Amplituden ( $i \in \{a, b, r\}$ )

$$\vec{k} \times \vec{E} = -\omega \vec{B} \quad \Rightarrow \quad k_i E_i^N = \omega B_i^T \quad \text{und} \quad k_i E_i^T = -\omega B_i^N, \quad (2.9)$$

und über  $\omega = k_1 v_1$  sowie mit Hilfe der Beziehung (2.5)

$$\begin{aligned}(E_a^T + E_r^T) \sin \alpha_2 &= E_b^T \sin \alpha_1, \\ (E_a^N - E_r^N) \tan \alpha_2 &= E_b^N \tan \alpha_1, \quad E_a^N + E_r^N = E_b^N.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Zwei der sechs Gleichungen aus (2.6) und (2.10) sind redundant, die anderen reichen aber aus, um die Feldkomponenten des reflektierten und gebrochenen Strahls in Abhängigkeit derjenigen des einfallenden Strahls zu bestimmen. Trigonometrische Umformungen führen auf

$$\begin{aligned}E_b^T &= \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)} E_a^T, & E_r^T &= \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)} E_a^T, \\ E_b^N &= \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} E_a^N, & E_r^N &= -\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} E_a^N.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Diese Formeln sind als *Fresnelsche Formeln* bekannt (Augustin Jean Fresnel, frz. Physiker, 1788–1827). Sie kennzeichnen das *Reflexionsvermögen*  $r$  und die *Durchlässigkeit*  $d$  gemäß

$$r = \frac{|\vec{S}_r|}{|\vec{S}_a|} = \frac{|\vec{E}_r|^2}{|\vec{E}_a|^2}, \quad d = \frac{|\vec{S}_b|}{|\vec{S}_a|} = \frac{|\vec{E}_b|^2}{|\vec{E}_a|^2}. \quad (2.12)$$

### 2.2.2 Der Brewsterwinkel

Die Fresnelschen Formeln weisen eine Besonderheit auf, die hier genauer betrachtet werden soll. Da die Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  über das Snelliussche Brechungsgesetz miteinander verbunden sind, ist der Proportionalitätsfaktor zwischen den Feldkomponenten eigentlich nur eine Funktion eines der beiden Winkel, beispielsweise des Einfallwinkels. Trägt man nun das Reflexionsvermögen eines parallel zur Grenzfläche polarisierten Strahls gegen diesen Winkel auf, so findet sich ein Wert, bei dem dieses Reflexionsvermögen verschwindet, also kein Strahl reflektiert wird. Entsprechend „überlebt“ bei diesem Winkel nur die Polarisationsrichtung in der zur Grenzfläche senkrechten Ebene. Dies findet sich auch in den Fresnelschen Formeln wieder. Es ist der Fall  $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$ , bei dem der Tangens unendlich, sein Kehrwert aber zu Null wird. Und es ist wegen  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  auch die einzige Stelle, an der einer dieser Koeffizienten verschwindet.

$\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$  heißt, daß reflektierter und gebrochener Strahl aufeinander senkrecht stehen. Der Wert für den Winkel  $\alpha_1$  wird als nach dem englischen Physiker Sir David Brewster (1781–1868) als *Brewsterwinkel* bezeichnet und ergibt sich aus

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin(90^\circ - \alpha_1)} = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \tan \alpha_1. \quad (2.13)$$

Für  $n_1 = 1$  und  $n_2 = 1.5$  erhält man  $\alpha_1 \approx 56^\circ$ , der Winkel nähert sich für kleine Unterschiede im Brechungsindex dem Wert  $45^\circ$ . Licht, das mit dem Brewsterwinkel auf eine entsprechende Grenzfläche fällt, läßt sich polarisieren. Dies

kommt auch in der Natur beim Auftreffen von Sonnenlicht auf unterschiedlich dichte Luftschichten vor. Das senkrecht zur Sonnenstrahlung reflektierte Licht ist polarisiert, und Bienen können dieses wahrnehmen. Die entsprechenden Punkte am Himmel werden *Aragoscher* und *Babinetischer Punkt* genannt (Dominique François Arago (1786–1853) und Jacques Babinet (1794–1872), französische Physiker).

Abbildung 2.4 zeigt einen Versuch zum Brewsterwinkel, und in der folgenden Tabelle sind Brewsterwinkel  $\alpha_B$  für einige Materialien aufgeführt, für die beiden ersten im sichtbaren, für die letzten beiden im Infrarotbereich des Spektrums.

Stoff	$n$	$\alpha_B$
Wasser	1.33	53°
Schwerflint	1.75	60°
Schwefel	2.0	67°
Selen	2.4	67°

Tab. 2.1 Brewsterwinkel für verschiedene Materialien

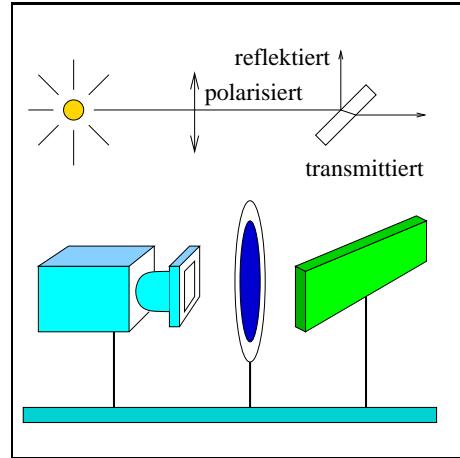


Abb. 2.4 Versuch zum Brewsterwinkel

### 2.2.3 Senkrechter Einfall

Aus den Fresnelschen Formeln ergibt sich im Grenzfall  $\alpha_1 \rightarrow 0$  und damit  $n_1 \alpha_1 \approx n_2 \alpha_2$  recht schnell das Reflexionsvermögen und die Durchlässigkeit, die hier für beide Polarisationsrichtungen jeweils gleich sind,

$$r = \frac{(n_2 - n_1)^2}{(n_2 + n_1)^2}, \quad d = \frac{(2n_1)^2}{(n_2 + n_1)^2}. \quad (2.14)$$

Für den Übergang von Glas zu Luft (wie auch im umgekehrten Fall) ist das Reflexionsvermögen sehr klein,  $r \approx 0.04$ . An den beiden Grenzflächen einer Glasscheibe zusammen wird also nur 8% des einfallenden Lichtes reflektiert.

### 2.2.4 Totalreflexion

Für den Übergang vom dichteren zum dünneren Medium erhält man einen weiteren Effekt. Ist  $n_1 > n_2$ , so ergibt das Snelliussche Brechungsgesetz einen *Maximalwinkel*  $\alpha_1^{\max}$  mit

$$\sin(\alpha_1^{\max}) = \frac{n_2}{n_1}, \quad (2.15)$$

bei dem  $\sin \alpha_2 = 1$  wird und oberhalb dessen ein gebrochener Strahl nicht mehr existiert. Wir sprechen von der *Totalreflexion*, der Grenzwinkel ist für den Übergang von Glas zu Luft 42°. Dennoch ist auch für größere Winkel in der Nähe des Übertrittspunktes noch ein elektromagnetisches Feld vorhanden, das allerdings exponentiell abfällt. Setzen wir die Aufspaltung

$$k_x = |\vec{k}| \sin \alpha_2, \quad k_z = |\vec{k}| \cos \alpha_2 = |\vec{k}| \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2}, \quad |\vec{k}| = \frac{\omega}{v_2}$$

zu Werten  $\sin \alpha_2 > 1$  hin fort, so ergibt sich eine rein imaginäre Wellenvektor-komponente  $k_z$  und damit aus dem stationären Ansatz

$$\vec{E}_b = \vec{E}_b^0 \exp(i(\omega t - k_x^b x - k_z^b z)) = \vec{E}_b^0 \exp(i(\omega t - k_x^b x)) \exp(-z/L),$$

wobei

$$L = \frac{v_2}{\omega \sqrt{\sin^2 \alpha_2 - 1}} = \frac{n_2 \lambda_2}{2\pi \sqrt{(n_1)^2 \sin^2 \alpha_1 - (n_2)^2}} \quad (2.16)$$

die *Eindringtiefe* zur Wellenlänge  $\lambda_2$  des Lichtes im dünneren Medium ist. Daß ein solches exponentiell abfallendes Feld existiert, zeigt sich, wenn man dicht neben die total reflektierende Glasplatte eine zweite legt. Der (abgeschwächte) Strahl setzt sich in dieser Platte in derselben Richtung fort. Es handelt sich hierbei um die optische Ausprägung des *Tunneleffekts* der Quantenmechanik.

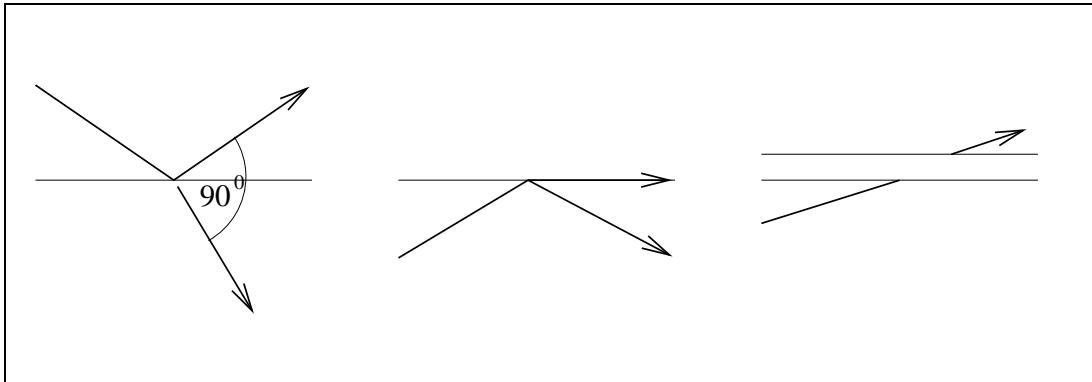


Abb. 2.5 Brewsterwinkel (links), Totalreflexion und Tunneleffekt

### 2.2.5 Linear- und Zirkularpolarisation

Polarisiertes Licht, wie es im Brewsterschen Experiment erzeugt wurde, behält seine Polarisationsebene bei. Das liegt daran, daß die beiden Feldkomponenten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung in Phase sind, wobei die beiden Amplituden lediglich kennzeichnen, wie die Polarisationsebene relativ zu den Achsen liegt. Licht dieser Art heißt *linear polarisiert*. Ist jedoch eine der beiden Komponenten gegen die andere um eine Phase  $\pi/2$  verschoben, so bewegt sich der Polarisationsvektor auf einer Helixbahn, wir sprechen von *zirkular polarisiertem Licht*. So steht in

$$\vec{E} = E_0 \left( \vec{e}_x \cos(kz - \omega t) + \vec{e}_y \cos(kz - \omega t \pm \pi/2) \right)$$

Das „+“ für rechtszirkulare und das „-“ für linkszirkulare Licht. Phasensprünge können an bedämpften Gläsern auftreten. Eine  $\lambda/2$ -Platte besitzt eine Achse, in deren Richtung ein Phasensprung von  $\lambda/2$  (daher der Name) auftritt, also besitzen zwei Komponenten, die vorher in Phase waren, danach eine Phasendifferenz von  $\pi$ . Die Polarisationsebene von linear polarisiertem Licht wird so um  $90^\circ$  gedreht. Bei einer  $\lambda/4$ -Platte entsteht nur eine Phasendifferenz von  $\pi/2$ , linear polarisiertes Licht verwandelt sich in zirkular polarisiertes.

### 2.2.6 Doppelbrechung

Doppelbrechung entsteht in Kristallen, die je nach Lichtausbreitung einen unterschiedlichen Brechungsindex besitzen, also ein anisotropes Brechungsverhalten ausweisen. In der Natur kommt dies beispielsweise beim Kalkspat ( $CaCO_3$ ) vor. Aber auch isotrope Materialien wie Plexiglas lassen sich durch äußere Einflüsse (wie Druck, Biegung, ein Temperaturgradient oder elektrische Felder) anisotrop machen. Dies wird umgekehrt in der Materialprüfung verwendet, um Spannungen sichtbar zu machen. Diese Anisotropie ist anhängig von der Polarisationsrichtung des Lichtes. So ist für die eine Polarisationsrichtung eine Isotropie des Brechungsindex vorhanden, während sie für die dazu senkrechte davon abweicht. Das Licht setzt sich, wie noch zu zeigen sein wird, entsprechend in zwei linear polarisierten Strahlen fort, wobei ersterer als *ordentlicher* ( $o$ ), letzterer als *außerordentlicher Strahl* ( $e$ ) bezeichnet wird.

Entlang der *optischen Achse* sind beide Brechungsindizes gleich, dort findet keine Aufspaltung des Strahls statt. Die größte Abweichung ergibt sich dagegen senkrecht zu dieser Achse. Ist  $n_o$  der Brechungsindex für den ordentlichen Strahl und  $v_o$  die zugehörige Ausbreitungsgeschwindigkeit, so verändert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_e$  für den außerordentlichen Strahl von  $v_o$  entlang der optischen Achse in  $v_e^*$  entlang einer Richtung senkrecht dazu. Für  $v_e^* < v_o$  sprechen wir von einem *positiv doppelbrechenden*, für  $v_e^* > v_o$  von einem *negativ doppelbrechenden Kristall*.

Vielleicht wird das Verhalten am deutlichsten, wenn man sich die Lichtausbreitung wie im Huygensschen Prinzip wieder aus Elementarwellen zusammengesetzt denkt. Für den ordentlichen Strahl sind dies Kugelwellen, für den außerordentlichen dagegen Ellipsoide mit der optischen Achse als Symmetriechse. Abbildung 2.6 zeigt das Konstruktionsprinzip für die beiden Strahlrichtungen.

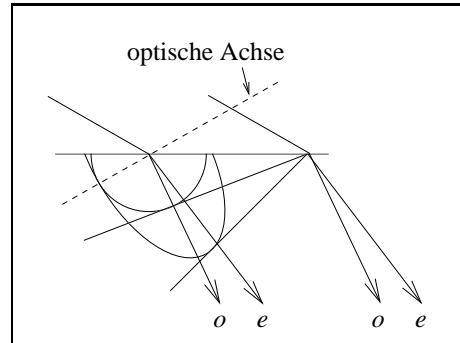


Abb. 2.6 Prinzip der Doppelbrechung

Ein Kalkspatkristall ist wie ein Parallelotop gebaut. Daher ergibt sich beim Austritt aus dem Kristall der umgekehrte Vorgang. Die beiden Strahlen treten also parallel, aber versetzt aus dem Kristall aus. Dies ist auch der Grund, warum ein doppelbrechender Kristall zwei je nach Blickrichtung gegeneinander verschobene Kopien der Unterlage erkennen lässt, auf der er liegt.

Es gibt, das sei hier nur kurz angesprochen, darüber hinaus noch Polarisierungseffekte bei einigen chemischen Verbindungen. So besitzen spezielle Fruchzuckerarten ein unterschiedliches Brechungsverhalten, je nachdem, ob das einfallende Licht rechts- oder linkszirkular polarisiert ist.

## 2.3 Geometrische Optik

Die geometrische Optik verwendet für die Lichtausbreitung das Bild des *Lichtstrahls*. Dieser wird an Grenzflächen gespiegelt und gebrochen und durchquert den homogenen Raum zwischen den Grenzflächen geradlinig. Ein Beispiel für einen nichthomogenen Raum sei an dieser Stelle als Versuch anbei gestellt: Die Ausbreitung eines Laserstrahls in einer Kochsalzlösung, die nach unten hin dichter wird. Bei örtlich variablem Brechungsindex erkennt man deutlich einen gekrümmten Lichtstrahl.

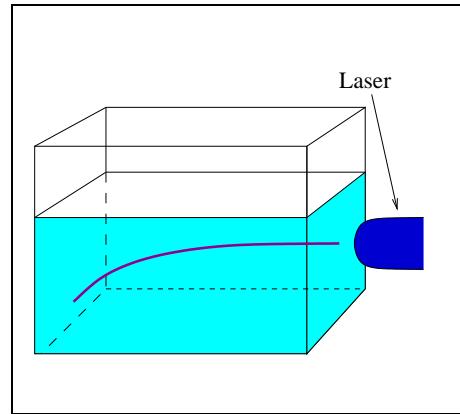


Abb. 2.7 Örtlich variabler Brechungsindex

### 2.3.1 Der Hohlspiegel

Die geometrische Optik einer spiegelnden Fläche ist am einfachsten zu behandeln, muß hier doch nur berücksichtigt werden, daß Ein- und Ausfallwinkel denselben Wert besitzen. Anhand von Abbildung 2.8 (links) sollen zunächst die wichtigsten Bezugspunkte bei der Reflexion an einem sphärischen Hohlspiegel betrachtet werden. Da ist zunächst einmal der *Mittelpunkt*  $M$  der Kugelschale. Durch ihn verläuft die *Hauptachse*, und dort, wo sie den Spiegel trifft, findet sich der *Scheitelpunkt*  $S$ . Ein zur Hauptachse paralleler Strahl treffe den Spiegel im *Auftreffpunkt*  $A$ . Nach der Reflexion kreuzt er die Hauptachse im *Brennpunkt* oder *Fokus*  $F$ . Die *Brennweite*  $f$  schließlich ist der Abstand zwischen Scheitel- und Brennpunkt.

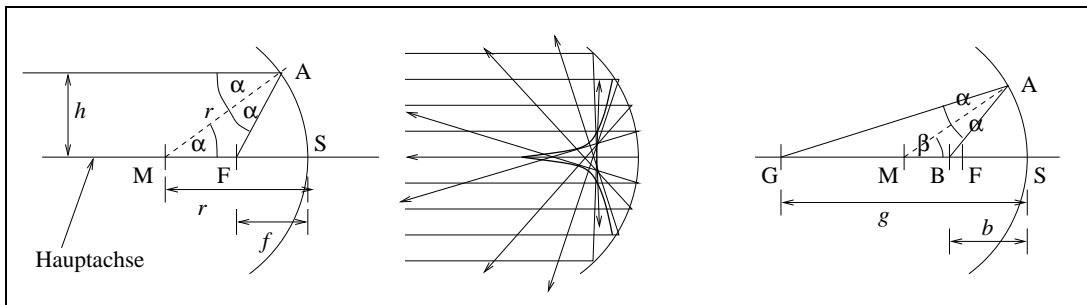


Abb. 2.8 Reflexion eines Parallelstrahls (links) und eines Punktstrahls (rechts). In der Mitte ist die Kataklastik für einen sphärischen Hohlspiegel dargestellt

Wir betrachten den Parallelstrahl und seine Reflexion, wie sie in Abbildung 2.8 links dargestellt sind, um eine Beziehung zwischen Radius  $r$  (also dem Abstand zwischen  $M$  und  $S$  bzw.  $A$ ) und der Brennweite herzustellen. Aus trigonometrischen Überlegungen folgt, da sich der Winkel  $\alpha$  sowohl im Winkel  $MAF$  als auch in  $AMF$  wiederfindet, die Gleichschenkligkeit des Dreiecks  $AMF$ . Es ist dann

$$\overline{MF} = \overline{FA} = \frac{\overline{MA}}{2 \cos \alpha} = \frac{r}{2 \cos \alpha} \quad \text{und} \quad h = r \sin \alpha.$$

Für *paraxiale Strahlen*, also solche nahe der Hauptachse, ist  $h \ll r$  und damit  $\alpha$  klein. Die Näherung  $\cos \alpha \approx 1$  genügt für diese Zwecke, man erhält  $\overline{MF} = r/2$  und damit

$$f = \overline{FS} = r - \overline{MF} = \frac{r}{2}. \quad (2.17)$$

Für achsenferne Strahlen dagegen erhält man die *sphärische Aberration*, die sich dadurch bemerkbar macht, daß sich Parallelstrahlen nach der Reflexion nicht im Brennpunkt sammeln, sondern näher zum Scheitelpunkt rücken, je achsenferner der Parallelstrahl ist. Die Einhüllende dieser Strahlenschar, die bei einem Strahlenbündel sichtbar wird, wird als *Kataklastik* bezeichnet. Sie ist in Abbildung 2.8 in der Mitte dargestellt. Die sphärische Aberration läßt sich vermeiden, wenn man statt des sphärischen einen *parabolischen Spiegel* verwendet.

Wo trifft ein von einem Punkt der *Gegenstandsebene*, dem Gegenstandspunkt  $G$  ausgehender Strahl nach der Reflexion die optische Achse? Um dieser Frage nachzugehen, betrachten wir den rechten Teil der Abbildung 2.8. Der betreffende Punkt, welcher die *Bildebene* markiert, sei mit  $B$  bezeichnet. Dann ergibt sich aus dem Sinussatz, angewendet auf die Dreiecke  $GAM$  bzw.  $BAM$

$$\frac{\overline{MG}}{\overline{AG}} = \frac{|\sin \alpha|}{|\sin(\pi - \beta)|} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}}.$$

Betrachten wir erneut paraxiale Strahlen, so ist  $\overline{AG} \approx \overline{SG} = g$  die *Gegenstandsweite* und  $\overline{AB} \approx \overline{SB} = b$  die *Bildweite*, beide vom Scheitelpunkt aus gemessen. Folglich ist mit  $f = r/2$

$$\frac{g - r}{g} = \frac{r - b}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (2.18)$$

Diese Gleichung ist die *Abbildungsgleichung*, eine der Grundgleichungen der geometrischen Optik, die auch später bei der Linsenbrechung zum Tragen kommt. Verwendet man die Größen

$$x := g - f \quad \text{und} \quad x' := b - f,$$

so ergibt sich eine andere Form, die auf Isaac Newton zurückgeht und in manchen Fällen praktischer ist,

$$xx' = f^2. \quad (2.19)$$

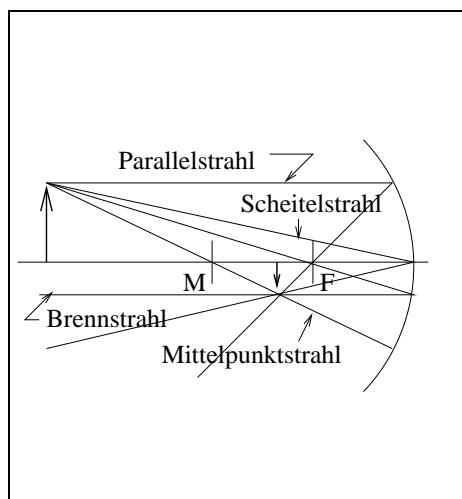


Abb. 2.9 Konstruktion des Bildes

Die Konstruktion des Bildes eines Gegenstandes, welcher sich über die Hauptachse erhebt, lässt sich geometrisch mit Hilfe der folgenden vier Strahlen und ihrer Reflexionswege vollziehen:

- der *Parallelstrahl* geht nachher durch den Brennpunkt
- der *Mittelpunktstrahl* läuft denselben Weg zurück
- der *Brennstrahl* verlässt den Spiegel parallel, und
- der *Scheitelstrahl* verläuft symmetrisch zur Hauptachse.

Gegenstandsweite	Bildweite	Vergrößerung
$\infty > x > f$ ( $\infty > g > 2f$ )	$0 < x' < f$ ( $f < b < 2f$ )	$0 > v > -1$
$x = f$ ( $g = 2f$ )	$x' = f$ ( $b = 2f$ )	$v = -1$
$f > x > 0$ ( $2f > g > f$ )	$f < x' < \infty$ ( $2f < b < \infty$ )	$-1 > v > -\infty$
$0 > x > -f$ ( $f > g > 0$ )	$-\infty < x' < -f$ ( $-\infty < b < 0$ )	$\infty > v > 1$

Tab. 2.2 Beziehung zwischen Gegenstandsweite, Bildweite und Vergrößerung

Mit Hilfe dreier der vier Strahlen (eigentlich genügen nur zwei) ist die Konstruktion des Bildes in Abbildung 2.9 durchgeführt. Als Gegenstand hält ein einfacher Pfeil her, zu dessen Spitze  $G'$  der Bildpunkt  $B'$  konstruiert wird. Die *Lateralvergrößerung*, also die Vergrößerung bezüglich der Höhe des Gegenstandes, ist

$$v = -\frac{\overline{BB'}}{\overline{GG'}} = -\frac{b}{g} = -\frac{f}{g-f} = -\frac{f}{x}, \quad (2.20)$$

wobei zur ersten Gleichheit der Strahlensatz für den Scheitelstrahl, für die zweite Gleichheit die Abbildungsgleichung in der Form  $b = gf/(g-f)$  und zur dritten Gleichheit die Newtonsche Schreibweise verwendet wurde. Aus den Gleichungen (2.19) und (2.20) ergibt sich die obenstehende Tabelle 2.2, wobei die Fälle (bis auf den zum ersten symmetrischen dritten Fall) auch in Abbildung 2.10 geometrisch dargestellt sind. Die ersten drei Fälle liefern ein reelles, auf dem Kopf stehendes Bild, also eines, welches sich vor dem Spiegel wiederfindet. Der letzte Fall ergibt ein virtuelles, aufrecht stehendes Bild, das sich aus der Verlängerung der Strahlen hinter den Spiegel ergibt.

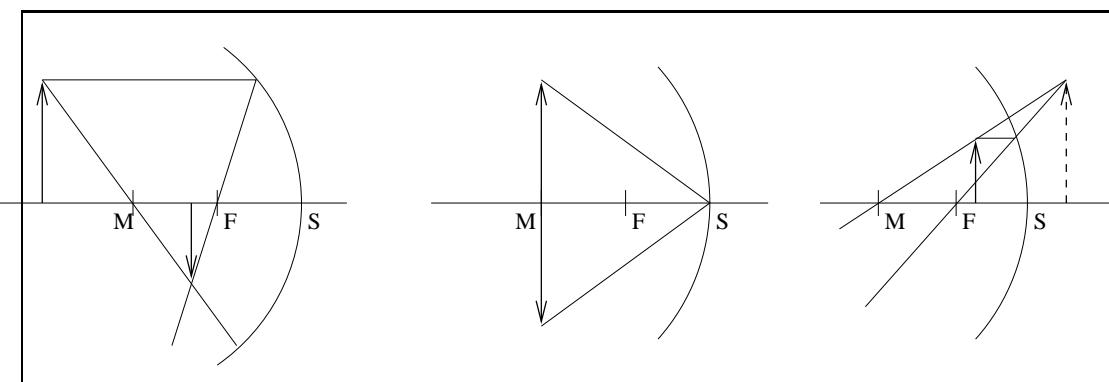


Abb. 2.10 Bildkonstruktion für  $g > 2f$  (links),  $g = 2f$  (Mitte) und  $g < f$  (rechts)

### 2.3.2 Die Linse

Auch für die *optische Linse* gehen wir von einer sphärischen Oberfläche aus, welche von paraxialen Strahlen getroffen wird. Zu Beginn steht jedoch eine rein geometrische Vorüberlegung, welche die Abweichung der Hypotenuse von der Ankathete bei kleinen Öffnungswinkeln bestimmt.

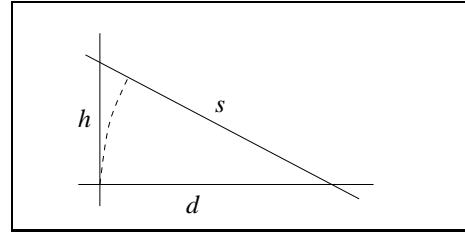


Abb. 2.11 geometrische Vorüberlegung

In Abbildung 2.11 ist nach dem Satz des Pythagoras

$$h^2 = s^2 - d^2 = (s - d)(s + d)$$

und damit für  $h \ll s$

$$s - d = \frac{h^2}{s + d} \approx \frac{h^2}{2s}.$$

Eine einfache Linse setzt sich aus zwei sphärischen Oberflächen zusammen. Doch bevor wir eine solche Linse konstruieren, bestimmen wir das optische Verhalten einer sphärischen Oberfläche selbst. Dazu betrachten wir die Situation, die in Abbildung 2.12 dargestellt ist, für paraxiale Strahlen.

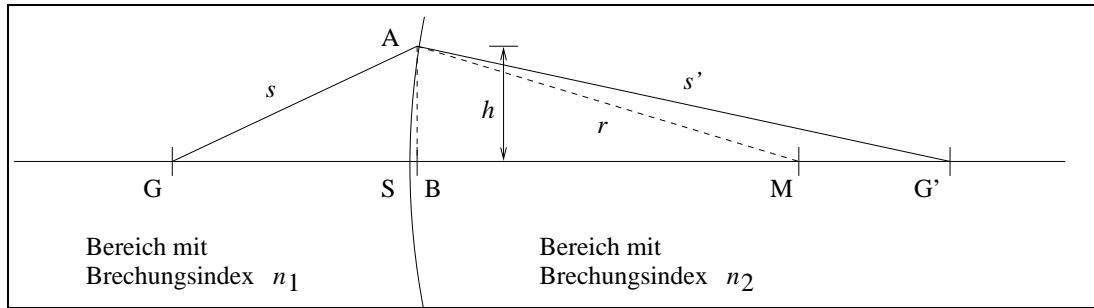


Abb. 2.12 Brechungsverhalten einer konvexen sphärischen Oberfläche

Ist  $s = \overline{GA}$ ,  $s' = \overline{AG'}$ ,  $h = \overline{AB}$  und  $r = \overline{MA} = \overline{MS}$  der Radius der Sphäre, so ergibt sich nach den eben angestellten geometrischen Überlegungen zunächst

$$\overline{GA} = \overline{GB} + \frac{h^2}{2s}, \quad \overline{AG'} = \overline{BG'} + \frac{h^2}{2s'} \quad \text{sowie} \quad \overline{SG'} = \overline{BG'} + \frac{h^2}{2r}.$$

Um nun eine Beziehung zwischen den auftretenden Längen, also vor allem zwischen  $s$  und  $s'$  zu erhalten, benutzen wir das Fermatsche Prinzip. Diesem Prinzip nach muß das Licht für den Weg  $GAG'$  dieselbe Zeit benötigen wie für  $GBG'$ . Besitzt der Brechungsindex links der sphärischen Grenzfläche in Abbildung 2.12 den Wert  $n_1$  und rechts davon  $n_2$ , so ist das Fermatsche Prinzip, in Formeln gefaßt,

$$\begin{aligned} n_1 \overline{GA} + n_2 \overline{AG'} &= n_1 \overline{GS} + n_2 \overline{SG'} = n_1 (\overline{GB} + \overline{BG'} - \overline{SG'}) + n_2 \overline{SG'} \\ \Leftrightarrow n_1 \left( \overline{GB} + \frac{h^2}{2s} \right) + n_2 \left( \overline{BG'} + \frac{h^2}{2s'} \right) &= n_1 \left( \overline{GB} - \frac{h^2}{2r} \right) + n_2 \left( \overline{BG'} + \frac{h^2}{2r} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & n_1 \frac{h^2}{2s} + n_2 \frac{h^2}{2s'} = -n_1 \frac{h^2}{2r} + n_2 \frac{h^2}{2r} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{(n_2 - n_1)}{r}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Da  $s$  und  $s'$  für paraxiale Strahlen mit der Gegenstands- und Bildweite identisch sind, kann die rechte Seite so etwas wie eine inverse Brennweite sein. Doch bevor wir nun auch das Brechungsverhalten einer Linse mit zwei solchen sphärischen Oberflächen bestimmen, bauen wir sie besser aus diesen beiden Elementen auf und benutzen dazu ein Schema, das auch im weiteren sehr nützlich sein wird, das Schema der *Matrixschreibweise einer Abbildung*.

### 2.3.3 Matrixschreibweise der Abbildung

Der ein- und ausgehende Strahl in Abbildung 2.12 sind über die Relation (2.21) aneinander gekoppelt. Die Strahlen werden durch die Geraden

$$y_1(z) = h + \frac{hz}{s} \quad \text{und} \quad y_2(z) = h - \frac{hz}{s'}$$

miteinander in Beziehung gesetzt, wobei der Ursprung  $z = 0$  auf die Grenzfläche gesetzt wird (alles natürlich für paraxiale Strahlen, für welche die Punkte  $B$  und  $S$  über diesem Ursprung zu liegen kommen). Am Ursprung ergibt sich einerseits klarerweise  $y_1(0) = y_2(0)$ , andererseits aber für die Steigungen

$$n_2 y'_2(0) = -n_1 \frac{h}{s'} = -\frac{h(n_2 - n_1)}{r} + n_1 \frac{h}{s} = (n_1 - n_2) \frac{y_1}{r} + n_1 y'_1(0).$$

In Matrixform geschrieben, lauten diese beiden Gleichungen

$$\begin{pmatrix} y_2(0) \\ y'_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_1 - n_2)/n_1 r & n_1/n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y'_1(0) \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Wird eine zweite Grenzfläche hinter die erste gesetzt, so sind Achsenabstand und Steigung erneut durch eine solche Matrix beschreibbar. Das Hintereinanderlegen der Oberflächen entspricht daher der Matrixmultiplikation. Dies werden wir gleich sehen. Ist die zweite Grenzfläche eine nach rechts gewölbte Sphäre mit gleichem Krümmungsradius, die vom Medium mit Brechungsindex  $n_2$  zurück in das Medium mit Brechungsindex  $n_1$  zurückführt, so ergibt sich die entsprechende Abbildungsgleichung aus der ersten formal durch Vertauschung von  $n_1$  und  $n_2$  und Ersetzung von  $r$  durch  $-r$ . Die Brennweite bleibt also dieselbe, was auch anschaulich klar ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_3(0) \\ y'_3(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_1 - n_2)/n_2 r & n_2/n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y'_2(0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_2 - n_1)/n_2 r & n_2/n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_2 - n_1)/n_1 r & n_1/n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y'_1(0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2(n_1 - n_2)/n_1 r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y'_1(0) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y'_1(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$f$  ist nun in der Tat die *Brennweite* dieser als flach angenommenen Linse, denn aus der Beziehung zwischen den Geradensteigungen im Medium mit dem einheitlichen Brechungsindex  $n_1$  hebt sich diese heraus, und man erhält die Abbildungs- oder *Linsengleichung*

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad f = \frac{n_1 r}{(n_2 - n_1)}. \quad (2.23)$$

Bei einer dicken Linse ist noch eine *Driftstrecke* zu berücksichtigen, in der sich das Licht einfach geradlinig ohne Brechung ausbreitet. Diese Driftstrecke besitzt die Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (L \text{ ist die Länge der Driftstrecke}), \quad (2.24)$$

wie man sich leicht überzeugt. Die Matrix für die dicke Linse ist folglich

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_1 - n_2)/n_1 r & n_2/n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_1 - n_2)/n_2 r & n_1/n_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + (n_1 - n_2)L/n_2 r & n_2 L/n_1 \\ (n_1 - n_2)^2 L/n_1 n_2 r^2 + 2(n_1 - n_2)/n_1 r & 1 + (n_1 - n_2)L/n_2 r \end{pmatrix} = \\ &\approx \begin{pmatrix} 1 + (n_1 - n_2)L/n_2 r & n_1 L/n_2 \\ 2(n_1 - n_2)/n_1 r & 1 + (n_1 - n_2)L/n_2 r \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Näherung  $L \ll f$  verwendet wurde. Bezeichnen wir schließlich mit  $L' := n_1 L/n_2$  die *effektive Driftlänge*, so ergibt sich die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 - L'/2f & L' \\ -1/f & 1 - L'/2f \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

### 2.3.4 Bezeichnungen für Linseneigenschaften

Die soeben konstruierten Linsen, ob nun flach oder dick, werden als *bikonvex* bezeichnet, wobei die Wölbungseigenschaft (kovex oder konkav) jeweils vom Linsenkörper aus gerechnet ist. Eine solche Bikonvexlinse besitzt eine positive Brennweite und daher positive Lösungen der Linsengleichung für  $g$  und  $b$ . Sie ist *fokussierend*, denn sie bildet einen Parallelstrahl ( $g = \infty$ ) auf den Brennpunkt ( $b = f$ ) ab und wird im Volksmund als *Sammellinse* bezeichnet. Im Gegensatz dazu besitzt eine *defokussierende Linse* negative Brennweite und folglich keine durchgängig positive Lösung der Linsengleichung. Ein Parallelstrahl wird von der Achse fortgelenkt, der Brennpunkt einer solche Linse ergibt sich aus der rückwärtigen Verlängerung der ausgehenden Strahlen. Man spricht von *Streulinsen*, und diese sind im allgemeinen *bikonkav*. Gemischt konvex-konkave Linsen sind je nach dem Verhältnis der Krümmungsradien *fokussierend* oder *defokussierend*. Die Brennweite wird einschließlich ihres Vorzeichens im Kehrwert als *Brechkraft* angegeben, die entsprechende Einheit ist die *Dioptrie* ( $1 \text{ dpt} = 1 \text{ m}^{-1}$ )

### 2.3.5 Kombinationen aus Linsen

Als letzte Anwendung wollen wir das Brechungsverhalten zweier im Abstand  $d$  hintereinanderliegender Linsen der Brennweiten  $f_1 > 0$  und  $-f_2 < 0$  berechnen. Die Luft zwischen den beiden Linsen stellt erneut einen Driftraum dar. Man erhält aus der Kombination der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-d/f_1 & d \\ 1/f_2 - 1/f_1 - d/f_1 f_2 & 1+d/f_2 \end{pmatrix}.$$

Diese Kombination ist fokussierend für

$$\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{d}{f_1 f_2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_1 - f_2 < d.$$

Für  $f_1 = f_2$  ist diese Linsenkombination stets fokussierend.

## 2.4 Interferenz

Bei der Interferenz handelt es sich um die Überlagerung von Wellen. Ob es sich bei diesen Wellen um elektromagnetische Wellen oder Wellenphänomene ganz anderer Art handelt, beispielsweise um Wasserwellen, spielt zunächst einmal keine Rolle. Wichtig ist nur die Gültigkeit der folgenden zwei Grundprinzipien:

- 1) Da die Wellengleichungen linear sind, addieren sich die Amplituden  $A$  der verschiedenen an einem Punkt wirksamen Wellen.
- 2) Die relevante Meßgröße, die als *Intensität* bezeichnet wird (beim Licht die Energiedichte des Lichtes) ist proportional zum Betragsquadrat der Amplitude,  $I \sim |A|^2$ .

Wir wollen in diesem Abschnitt noch zwei weitere Grundannahmen machen:

- 3) Es besteht eine feste Phasenbeziehung zwischen den Wellenerregern.
- 4) Die Wellenlänge ist dieselbe.

Diese zwei Grundannahmen (erstere ist die Forderung der *Kohärenz*) garantieren die Stationarität der Situation, also die zeitliche Konstanz des Intensitätsmusters. Als Einstieg betrachten wir zwei an einem Punkt zusammenfallende Wellen derselben Frequenz, aber unterschiedlicher Phasen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ . Die Summe der Wellenfunktionen an diesem Punkt liefert

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}_0, t) &= \psi_1(\vec{r}_0, t) + \psi_2(\vec{r}_0, t) = \\ &= A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} = e^{i\omega t} (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Intensität

$$\begin{aligned} I &= |\psi(\vec{r}_0, t)|^2 = e^{i\omega t} e^{-i\omega t} (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}) (A_1 e^{-i\varphi_1} + A_2 e^{-i\varphi_2}) = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 (e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} + e^{i\varphi_2 - i\varphi_1}) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Für zwei Wellen gleicher Amplitude  $A_1 = A_2 = A$  gilt  $0 < I < 4A^2$ . Der tatsächliche Wert der Intensität hängt einzig und allein von der Phasendifferenz

$\delta = \varphi_1 - \varphi_2$  ab. Für  $I = 0$  spricht man von *destruktiver*, für  $I = 4A^2$  von *konstruktiver Interferenz*. Die Phasendifferenz kann zum einen durch tatsächlich unterschiedliche Anfangsphasen, zum anderen aber auch durch Laufzeitunterschiede aus dem unterschiedlichen Abstand zu den beiden Erregungszentren stammen. Man kann beide Phänomene formal voneinander trennen,

$$\delta = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) + \frac{2\pi}{\lambda}\Delta,$$

$\Delta$  heißt *Gangunterschied*,  $\lambda$  ist die Wellenlänge. In einem Experiment werde die Wasseroberfläche von zwei rhythmisch ins Wasser eintauchenden Stiften an zwei nebeneinanderliegenden Punkten am Rand einer Wasserwanne aus zu Schwingungen angeregt. Man erkennt ein Interferenzmuster, welches Zonen konstruktiver und destruktiver Interferenz aufweist. Da die Anfangsphasen gleich sind, handelt es sich um einen Effekt des Gangunterschiedes,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2),$$

wobei  $r_1$  und  $r_2$  die Abstände zu den beiden Erregungszentren sind. Destruktive Interferenz ergibt sich für  $\delta = (2n + 1)\pi$ , also für einen Gangunterschied

$$r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2\pi}(2n - 1)\pi = (2n - 1)\frac{\lambda}{2},$$

konstruktive Interferenz dagegen für  $\delta = 2n\pi$ , also

$$r_1 - r_2 = n\lambda.$$

#### 2.4.1 Vielstrahlinterferenz

Wir betrachten eine Anzahl von  $n$  Wellen einer festen Phasenbeziehung

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \varphi, \quad k \in \{2, 3, \dots, n\}$$

mit gleicher Amplitude  $A$ . Dann ergibt sich durch Überlagerung

$$A_n = A e^{i\omega t} \left( 1 + e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} + \dots + e^{i(n-1)\varphi} \right).$$

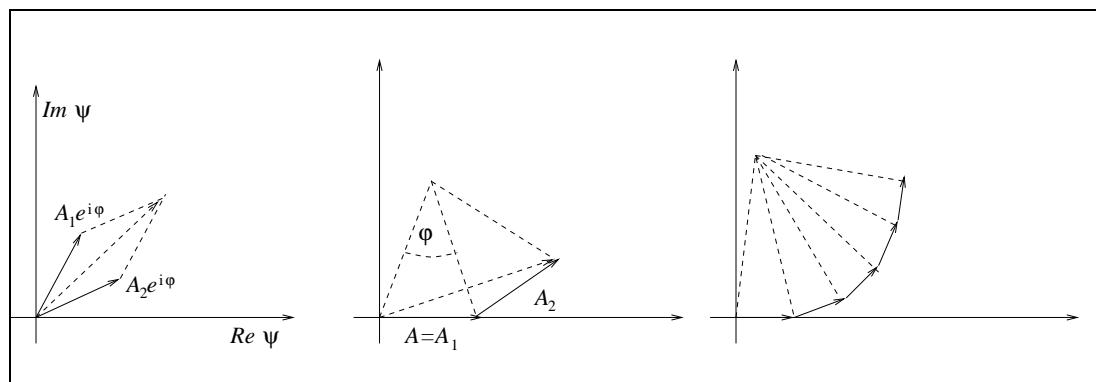


Abb. 2.13 Komplexe Darstellung einer Überlagerung zweier (links) und vieler Wellen (rechts)

Um die Situation dieser Überlagerung (*Superposition*) anschaulicher zu machen, stellen wir in Abbildung 2.13 links die Amplituden aus dem ersten Beispiel in der komplexen Ebene als Addition zweier Vektoren dar. Ist die Phase der ersten Welle auf Null gesetzt, so liegt der erste der Vektoren auf der reellen Achse, der zweite kann statt vom Ursprung aus auch an der Pfeilspitze des ersten ansetzen. Dies ist in der Mitte der Abbildung zu erkennen. Zugleich können auf den beiden Vektoren gleichschenklige Dreiecke errichtet werden, die eine Seite der Länge  $r$  und den Scheitelpunkt gemeinsam haben. Entsprechend kommen bei der Vielstrahlinterferenz weitere Vektoren und Dreiecke hinzu, die alle denselben Scheitelpunkt besitzen. Für die Amplituden ergibt sich so

$$\frac{A}{2} := \frac{|A_1|}{2} = r \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad \frac{|A_2|}{2} = r \sin\varphi, \quad \frac{|A_3|}{2} = r \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right), \quad \dots$$

und damit

$$|A_n| = 2r \sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right) = A \frac{\sin(n\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}. \quad (2.26)$$

Dieses Ergebnis ergibt sich übrigens auch ohne Anschauung aus der Formel für die geometrische Reihe,

$$\begin{aligned} A_n &= Ae^{i\omega t} \left(1 + e^{i\varphi} + \dots + e^{i(n-1)\varphi}\right) = Ae^{i\omega t} \frac{1 - e^{in\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = \\ &= A \frac{e^{in\varphi/2} (e^{-in\varphi/2} - e^{in\varphi/2})}{e^{i\varphi/2} (e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2})} e^{i\omega t} = A \frac{\sin(n\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} e^{i(n-1)\varphi/2} e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Frage ist nun, bei welchen Werten der relativen Phase  $\varphi$  ein Maximum bzw. Minimum zu erwarten ist. Minima sind sicherlich diejenigen Stellen, an denen der Zähler, nicht aber der Nenner verschwindet. Dies ist unter der Bedingung  $n\varphi = 2\pi k$ ,  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  gegeben, wenn  $\varphi$  selbst kein Vielfaches von  $2\pi$  ist. Doch was ist, wenn letzteres erfüllt ist? Hier kann die l'Hospitalsche Regel angewendet werden, um den Wert an dieser Stelle zu bestimmen,

$$|A_n(\varphi)| \rightarrow A \frac{|n \cos(n\varphi/2)|}{|\cos(\varphi/2)|} \rightarrow nA \quad \text{für } \varphi \rightarrow 2\pi m.$$

Mit  $I_n = n^2 A^2$  sind dies die *Hauptmaxima*, an denen es zur maximalen konstruktiven Interferenz kommt. Die *Nebenmaxima* liegen bei  $n\varphi = (2k+1)\pi$ ,  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , sie fallen stark gegen das Hauptmaximum ab, denn für ihre Intensität gilt näherungsweise

$$I_n = A^2 \frac{\sin^2(n\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)} \approx A^2 \frac{1}{(\varphi/2)^2} = \frac{4n^2 A^2}{(2k+1)^2 \pi^2}.$$

So erhält man für das erste Nebenmaximum nur 4.5% und für das zweite Nebenmaximum nur 1.62% der Intensität des Hauptmaximums.

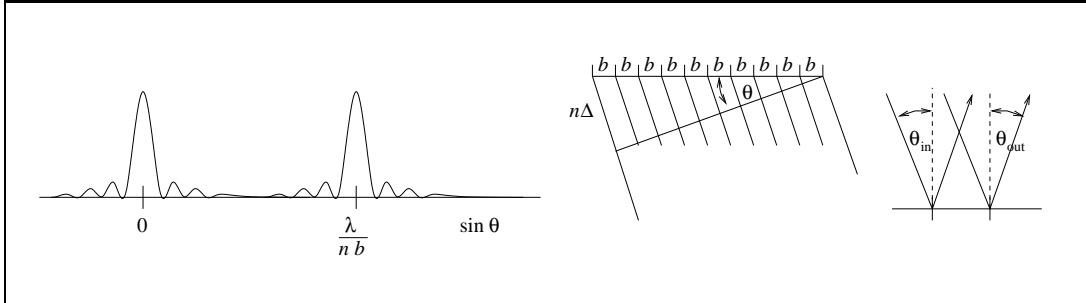


Abb. 2.14 Interferenzmuster (links) und Überlegungen am optischen Gitter (Mitte und rechts)

#### 2.4.2 Anwendung: Das Beugungsgitter

Ein optisches Liniengitter, also ein Raster aus lichtdurchlässigen Spalten und lichtundurchlässigen Lamellen, auf das ein Lichtstrahl fällt, stellt in idealer Weise ein Beispiel für ein solches Ensemble  $n$  gleichfrequenter und gleichintensiver Lichtstrahlen einer konstanten Phasendifferenz dar. Fällt der Lichtstrahl senkrecht auf das Gitter, so sind diese Punktquellen in Phase, und die Phasendifferenz auf dem dahinter liegenden Schirm ist durch den Gitterabstand (also den Abstand zwischen den einzelnen Gitterstäben) und den Winkel  $\theta$  zur Normalen bestimmt. Wie aus Abbildung 2.14 in der Mitte zu entnehmen ist, ist der Gangunterschied zwischen zwei benachbarten Oszillatoren

$$\Delta = b \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{2\pi b}{\lambda} \sin \theta \quad (b \text{ ist der Gitterabstand}).$$

$b > \lambda$  ist Voraussetzung dafür, daß ein Hauptmaximum entstehen kann. Die Lage der Hauptmaxima ist nach Gleichung (2.26) gegeben durch die Bedingung

$$\Delta = b \sin \theta = m\lambda, \quad m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Die Lage dieser Hauptmaxima, abgesehen von dem ersten mit  $m = 0$ , ist linear abhängig von der Wellenlänge des eingestrahlten Lichtes. Ein Liniengitter zerlegt damit einen multifrequenten Strahl in seine spektralen Anteile, und diese Aufspaltung nimmt zu, je kleiner der Gitterabstand gewählt ist. Im Experiment messen wir das Linienspektrum der Quecksilberdampflampe, indem wir ihr Licht durch ein Liniengitter hindurchschicken und das Spektrum in 3 Metern Abstand messen. Für die Spektrallinie der Wellenlänge  $\lambda = 435.8\text{nm}$  ergibt sich eine Auslenkung von  $87\text{cm}$ , die auf einen Gitterabstand  $b \approx 1.7\mu\text{m}$  schließen lässt. Dieser Wert ergibt sich auch aus den Herstellerdaten, in denen für dieses Gitter 567 Striche pro mm angegeben sind. Das Auftreten eines diskreten Linienspektrums, wie es hier zu beobachten ist, hat übrigens etwas mit elektronischen Übergängen in der Atomhülle zu tun, ein Vorgang, der erst im Rahmen der Quantenoptik im nächsten Semester zur Sprache kommen kann.

Fällt der Lichtstrahl nicht senkrecht, sondern schräg auf das Liniengitter, so schwingen die Oszillatoren entsprechend phasenversetzt. Man kann auch die

Reflexion am Gitter betrachten, wie in Abbildung 2.14 rechts dargestellt. Ist  $\theta_1$  der Einfall- und  $\theta_2$  der Ausfallwinkel, so ist der Gangunterschied

$$\Delta = d \sin \theta_1 - d \sin \theta_2.$$

Die Bedingung für die Hauptmaxima ist  $\Delta = m\lambda$ . Das erste Hauptmaximum ergibt sich daher für  $\theta_1 = \theta_2$ , also genau auf dem Winkel, für den eine spiegelnde Fläche statt des Gitters den Reflex gegeben hätte.

### 2.4.3 Kohärenz und Laser

Interferenz tritt nur bei *Kohärenz* auf, also bei einer festen Phasenbeziehung zwischen den Wellenerregern. Verschiedene Lichtquellen liefern dagegen kein kohärentes Licht, da die Lichterzeugung aus atomaren Prozessen stammt. Diese Prozesse senden *Wellenpakete* einer begrenzten Zeitdauer aus, wie in Abbildung 2.15 gezeigt, und die Länge dieser Pakete, auch als *Kohärenzlänge* bekannt, hängt davon ab, welche Lebensdauer der Prozeß besitzt, aus dem das Licht stammt.

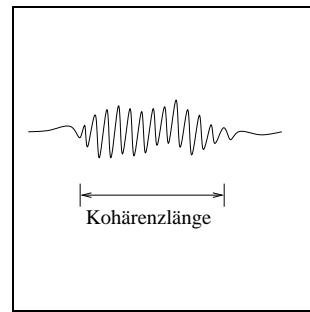


Abb. 2.15 Wellenpaket und Kohärenzlänge

Für Metallämpfe beispielsweise ist  $\Delta t \approx 10^{-8} s$ , die Kohärenzlänge daher  $l_c = c\Delta t \approx 3m$ . Für Festkörper ist  $\Delta t \approx 10^{-9} s$ , die Kohärenzlänge  $l_c = c\Delta t \approx 30cm$ . Sollen zwei Strahlen, die aus derselben Quelle stammen, miteinander interferieren können, so darf der Lichtweg beider Strahlen nicht größer gewählt werden als die Kohärenzlänge,  $|l_1 - l_2| < l_c$ . *Interferometer* sind Apparaturen, welche dies berücksichtigen. Sie sind im nächsten Unterabschnitten aufgeführt. Ein anderes Verfahren, kohärentes Licht zu erzeugen, ist die Verwendung eines Lasers. Sein Bauprinzip kann hier nicht erläutert werden. Soviel sei aber gesagt, daß er auf der stimulierten Emission beruht, bei der also ein Lichtstrahl weitere Atome zur Emission von Wellenpaketen anregt, die dann mit dem ersten in Phase sind.

### 2.4.4 Interferometer und Spektrometer

Ein aus der Relativitätstheorie bekanntes Interferometer ist dasjenige, das auf den amerikanischen Physiker Albert A. Michelson (1852–1931) zurückgeht.

Es nutzt die Interferenz zwischen direktem und reflektiertem Strahl aus, um Entfernungsänderungen präzise (d.h. mit einer Genauigkeit von der Größenordnung der Wellenlänge) zu messen. Diese Genauigkeit machte die in Abbildung 2.16 dargestellte Apparatur zu einem idealen Werkzeug, um die von einem mit der speziellen Relativitätstheorie Albert Einsteins konkurrierenden Modell vorhergesagte Längenkontraktion der Apparatur gegenüber dem Äther zu messen – und dies zu seinem Nachteil, wie sich herausstellte.

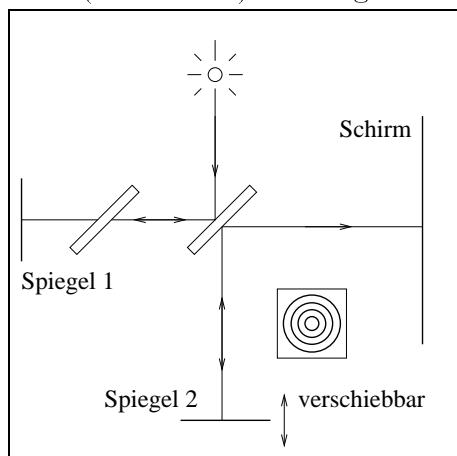


Abb. 2.16 Michelsonsches Interferometer

Der Strahl, der von einer Lichtquelle ausgeht, wird durch einen halbdurchlässigen Spiegel in der Mitte aufgeteilt in zwei zueinander senkrechte Anteile, die nach ihrer jeweiligen Reflexion zur Interferenz gebracht werden. Verschiebt man einen der Spiegel mit einer Mikrometerschraube, so ist eine Veränderung der Interferenzringe auf dem Schirm zu erkennen. Jeder neu auftretende Ring entspricht dabei einer Phasenverschiebung um  $\lambda/2$ . In der Praxis ist diese Genauigkeit aber viel zu hoch. Hier benutzt man die Schwebungseigenschaft zwischen zwei dicht benachbarten Spektrallinien.

Als Lichtquelle benutzen wir im Experiment eine Natriumdampflampe, aus deren Spektrum wir die Linien  $Na - D_1$  und  $Na - D_2$  mit den Wellenlängen  $\lambda_1 = 588.9965\text{nm}$  bzw.  $\lambda_2 = 589.5932\text{nm}$  herausfiltern. Wir können die folgenden beiden Situationen identifizieren:

- *Stellung 1:* Der Gangunterschied zwischen den zwei Lichtwegen verschwindet,  $d = 0$ . Diese Stellung ist an der deutlichen Helligkeit im Zentrum des Interferenzmusters aus konzentrischen Kreisen zu erkennen, wo sich in diesem Fall die Hauptmaxima sowohl für  $Na - D_1$  als auch für  $Na - D_2$  befinden. Das Bild ist im Zentrum kontrastreich.
- *Stellung 2:* Ausgehend von Stellung 1 suchen wir die Position, bei der das Bild maximal verwaschen ist. Dies ist der Fall, wenn das Hauptmaximum zu  $Na - D_1$  mit dem darauf folgenden Minimum zu  $Na - D_2$  zusammenfällt und sich Zonen konstruktiver und destruktiver Interferenz in der Nähe des Zentralbereichs ergänzen.

Forderung ist also (wegen  $\lambda_1 < \lambda_2$ )

$$n\lambda_1 = d = (n - 1/2)\lambda_2 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{\lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Aus den Angaben erhalten wir etwa einen Wert  $n \approx 494$  und damit einen Gangunterschied  $d = n\lambda_1 \approx 0.3\text{mm}$ . Der Spiegel ist also um die Hälfte dieses Weges verschoben worden. Statt aus bekannten Frequenzen auf eine Längenänderung zu schließen, kann die Apparatur auch dazu verwendet werden, mit Hilfe der beobachteten Effekte die Wellenlängen selbst zu bestimmen. Man bezeichnet die Apparatur dann als *Spektrometer*.

Als weiteres Interferometer sei hier der *Fresnelsche Doppelspiegel* genannt. Er ist in Abbildung 2.17 dargestellt und simuliert zwei kohärente Lichtquellen. Das Wirkungsprinzip dieses Doppelspiegels soll mit der ebenfalls dargestellten Kreiskonstruktion erläutert werden. Der auf dem Kreis liegende Lichtpunkt  $L$  wird durch die beiden im Kreismittelpunkt zusammenlaufenden Spiegelebenen auf die virtuellen Lichtpunkte  $L_1$  und  $L_2$  abgebildet.

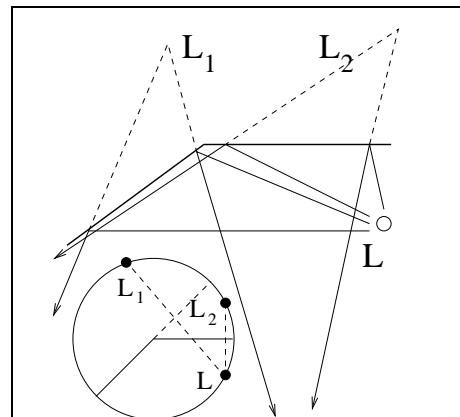


Abb. 2.17 Fresnelscher Doppelspiegel

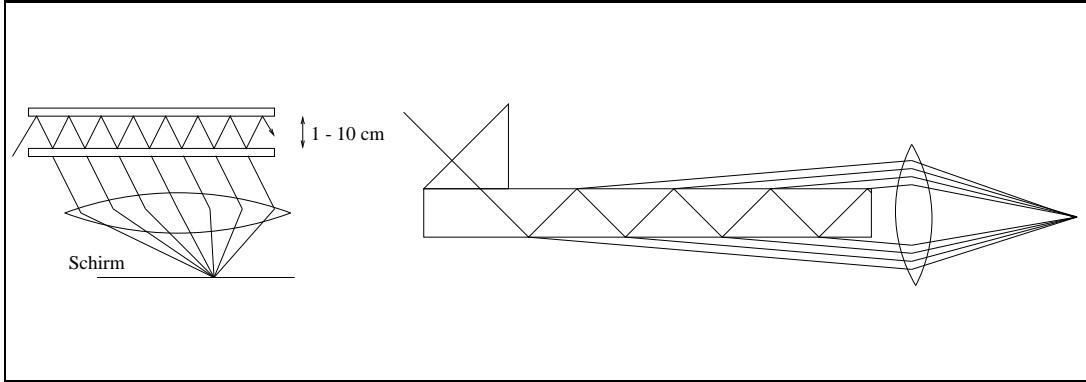


Abb. 2.18 Interferometer nach Fabry und Perot (links) und Lummer und Gehrke (rechts)

In Abbildung 2.18 sind zwei weitere Interferometer dargestellt. Das nach den französischen Physikern Fabry und Perot benannte Interferometer (in der Abbildung links) benutzt die Mehrfachreflexion an zwei genau parallel zu justierenden Glasplatten. Die durchgelassenen Strahlen werden von einer Linse gebündelt. Die Beobachtung von Schwebungserscheinungen kann zum Nachweis kleinstter Wellenlängendifferenzen benutzt werden. Das Interferometer der deutschen Physik Otto Lummer (1860–1935) und Ernst Gehrke (1878–1960) (rechts) besitzt ein ähnliches Bauprinzip, nur daß es sich hier um eine durchgehende Glasplatte handelt, aus der oben und unten die Strahlen austreten und nach vorne gebündelt werden. Besonders trickreich ist die Idee des Einführungskeils, die von Gehrke stammt. Tabelle 2.3 zeigt einige zur Frequenztrennung benutzte Interferometer.

Gerät	techn. Daten	Zahl der interferierenden Strahlen	Auflösung
Prisma	$dn/d\lambda \sim 1730 \text{ cm}^{-1}$	—	$\lambda/\Delta\lambda = 17300$
Strichgitter	Basis 10cm $n_D \sim 1.76$ 16cm Breite	$10^5$	$\lambda/\Delta\lambda = 3 \cdot 10^5$
Michelson		2	$\lambda/\Delta\lambda > 10^3$
Lummer-Gehrke	Länge 20cm Dicke 1cm	36	$\lambda/\Delta\lambda = 4 \cdot 10^5$
Fabry-Perot	1cm Abstand 10cm Abstand	30 30	$\lambda/\Delta\lambda = 10^6$ $\lambda/\Delta\lambda = 10^7$

Tab. 2.3 Gegenüberstellung verschiedener Spektrometer und Interferometer

## 2.5 Beugung

Unter *Beugung* versteht man die Abweichungen vom Strahlengang der geometrischen Optik, die sich ergeben, wenn die Dimensionen der Objekte, auf die das Licht fällt, von der Größenordnung der Wellenlänge des Lichtes sind. Wir wollen zunächst die *Fraunhofersche Beugung* (benannt nach Joseph Fraunhofer (1787–1826), deutscher Physiker) am Spalt betrachten, bevor wir auf eine allgemeinere Beugungstheorie eingehen. Der Spalt soll hier exemplarisch für

weitere Geometrien wie Strich-, Kreuz- und Raumgitter stehen, die ähnlich zu behandeln sind.

### 2.5.1 Beugung am Spalt mit senkrechtem Lichteinfall

Benutzt wird hier die Vielstrahlinterferenz, wobei nach der Aufteilung der Spaltbreite in  $p$  gleiche Stücke der Grenzübergang  $p \rightarrow \infty$  vollzogen wird. Der Gangunterschied zwischen zwei benachbarten Teilstrahlen ist gemäß Abbildung 2.19 gegeben als

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda p} \quad \text{mit } d = \overline{BF} = b \sin \varphi.$$

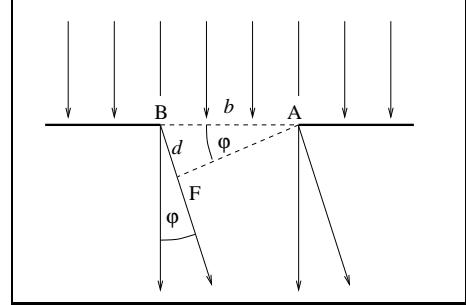


Abb. 2.19 Beugung am Spalt

Ist  $\beta e^{i\omega t}$  die Amplitude am Punkt  $A$ , also diejenige des ersten Teilstrahls, so gilt entsprechend für die Gesamtamplitude

$$\begin{aligned} A &= \beta e^{i\omega t} (1 + e^{-i\delta} + e^{-2i\delta} + \dots + e^{-i(p-1)\delta}) = \\ &= \beta e^{i\omega t} \frac{1 - e^{-ip\delta}}{1 - e^{-i\delta}} = \beta e^{i\omega t} \frac{\sin(p\delta/2)}{\sin(\delta/2)} e^{-i(p-1)\delta/2}. \end{aligned}$$

Ausgedrückt durch die Phasendifferenz  $\Delta = p\delta$  zwischen erstem und letztem Strahl ergibt sich

$$A = \beta e^{i\omega t} \frac{\sin(\Delta/2)}{\sin(\Delta/2p)} e^{-i(p-1)\Delta/2p}.$$

Im Grenzfall  $p \rightarrow \infty$  erhält man mit  $A_0 = \beta p$

$$A = A_0 e^{i\omega t} \frac{\sin(\Delta/2)}{\Delta/2} e^{-i\Delta/2}$$

und damit schließlich für die Intensität

$$I = A_0^2 \frac{\sin^2(\Delta/2)}{(\Delta/2)^2} \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{2\pi b}{\lambda} \sin \varphi. \quad (2.27)$$

Für  $\varphi = 0$ , also in Verlängerung des einfallenden Strahls, liegt das Hauptmaximum oder *Zentralbild* mit Intensität  $I_0 = A_0^2$ . Weitere charakteristische Stellen sind

- 2)  $d = \lambda/2$ : abfallende Flanke,  $I = 4I_0/\pi^2 = 0.406I_0$
- 3)  $d = \lambda$ : erstes Minimum,  $I = 0$
- 4)  $d = 3\lambda/2$ : erstes Nebenmaximum,  $I = 4I_0/9\pi^2 = 0.045I_0$
- 5)  $d = 2\lambda$ : zweites Minimum,  $I = 0$
- 6) ...

Das Beugungsmuster steht dabei senkrecht zum Spalt, während es in Richtung des Spaltes die Ausdehnung des Strahls besitzt. Ganz allgemein gilt, daß das

Beugungsmuster stets eine zum beugenden Objekt komplementäre Ausdehnung besitzt. Für eine Rechtecköffnung ergibt sich so auch

$$I = I_0 \frac{\sin^2(\Delta_x/2)}{(\Delta_x/2)^2} \frac{\sin^2(\Delta_y/2)}{(\Delta_y/2)^2} \quad \text{mit } \Delta_i = \frac{2\pi b_i}{\lambda} \sin \varphi_i, \quad i \in \{x, y\}, \quad (2.28)$$

wobei  $b_x$  und  $b_y$  die Ausdehungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung und  $\varphi_x$  und  $\varphi_y$  die Winkelabsenkungen in diese Richtungen sind. Als Interferenzmuster ergibt sich ein Rechteckmuster mit einer Rasterung der Länge  $2\lambda/b_i$ , also ein Raster der komplementären Ausdehnung. Für eine kreisförmige Öffnung erhält man schließlich ein ringförmiges Muster, das ausgedehnter wird, je enger das Loch geschlossen ist.

### 2.5.2 Das Babinettsche Theorem

Eine Komplementarität anderer Art postuliert das *Babinettsche Theorem*:

*Komplementäre Schirme liefern bei Fraunhoferscher Beugung außerhalb des Bereiches der geometrischen optischen Abbildung die gleichen Beugungerscheinungen.*

Komplementär heißt in diesem Zusammenhang, daß eine Öffnung durch eine undurchsichtige Blende vertauscht wird und umgekehrt. Als Versuch dazu betrachten wir die Beugungerscheinungen an einem Draht und einem Spalt gleichen Durchmessers bzw. Breite.

### 2.5.3 Beugungstheorie

Zum Abschluß soll hier ganz kurz die Beugungstheorie angerissen werden (ausführlicher findet sie sich in Max Borns „Optik“ in §45). Die Beugungstheorie macht drei Annahmen über die Lichterregung in der Blendenebene, d.h. der Ebene, welche sich aus der Fortsetzung der Blendenwände ergibt:

- Es gilt das Huygenssche Prinzip, nach dem sich das Licht im Raum 2 so ausbreitet, als wenn von jedem Punkt der Blendenöffnung eine Kugelwelle der Form

$$A = A(B) \frac{e^{ikr}}{r}$$

ausginge (zu den Bezeichnungen vergleiche Abbildung 2.20 links).

- Die Erregung in der Blendenöffnung  $B$  ist dieselbe, als wenn keine Blende vorhanden wäre, und wird von einer Kugelwelle verursacht, die von der Quelle  $Q$  im Abstand  $r'$  zur Blendenöffnung stammt,

$$A(B) = A_0 \frac{e^{ikr'}}{r'}.$$

- Auf dem Blendenwänden ist  $A = 0$ .

Durch Überlagerung der Kugelwellen ergibt sich die Amplitude am Beobachtungspunkt  $P$  über die *Kirchhoff-Fresnelsche Beugungsformel*

$$\begin{aligned} A(P) &= C \int_B A(B) \frac{e^{ikr}}{r} (\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}')) dB = \\ &= CA_0 \int_B \frac{e^{ikr'}}{r'} \frac{e^{ikr}}{r} (\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}')) dB \end{aligned}$$

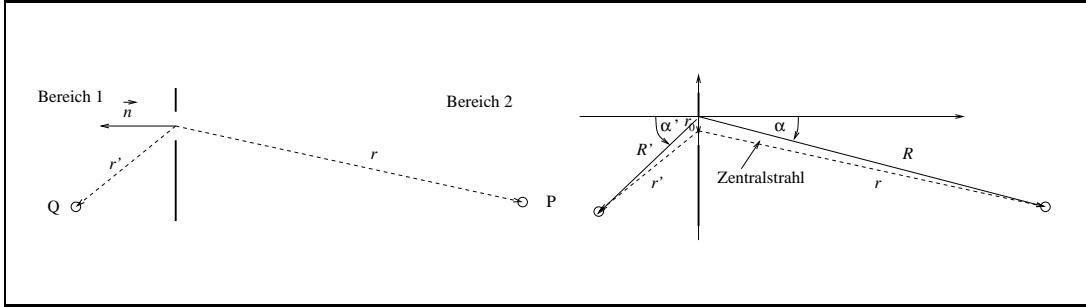


Abb. 2.20 Konstruktion der Beugungstheorie, rechts die Näherung kleiner Blendenöffnung

(Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887), deutscher Physiker). Wir betrachten nun die Näherung kleiner Blendenöffnung, wie sie in Abbildung 2.20 rechts dargestellt ist, und legen den Ursprung des Koordinatensystems in den einen Randpunkt der Blende. Dann ist der Ortsvektor des Empfangspunktes  $P$  mit  $\vec{R}$  und der Ortsvektor der Quelle  $Q$  mit  $\vec{R}'$  gegeben, wohingegen der Verbindungsvektor von einem beliebigen Punkt der Blendenöffnung mit Ortsvektor  $\vec{r}_0$  beispielsweise zu  $P$  in das als klein anzunehmende Verhältnis  $r_0/R$  zu entwickeln ist,

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{R} - \vec{r}_0 \quad \text{mit} \quad \vec{R} \cdot \vec{r}_0 = Rr_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = Rr_0 \sin \alpha \quad \Rightarrow \\ r &= \sqrt{R^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{r}_0 + r_0^2} = R\sqrt{1 - \frac{2r_0}{R} \sin \alpha + \frac{r_0^2}{R^2}} = \\ &\approx R\left(1 - \frac{r_0}{R} \sin \alpha + \frac{r_0^2}{2R^2} - \frac{r_0^2}{2R^2} \sin^2 \alpha + \dots\right) = \\ &= R - r_0 \sin \alpha + \frac{r_0^2}{2R} \cos^2 \alpha + \dots, \end{aligned}$$

entsprechend für  $\vec{r}' = \vec{R}' - \vec{r}_0$

$$r' \approx R' - r_0 \sin \alpha' + \frac{r_0^2}{2R'} \cos^2 \alpha' + \dots$$

Im Fall

$$\frac{r_0^2}{R} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \ll \pi \quad \text{und} \quad \frac{r_0^2}{R'} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \ll \pi$$

berücksichtigt man nur die führende lineare Ordnung dieser Entwicklungen und gelangt zur *Fraunhoferschen Näherung*, die gegeben ist durch

$$A(P) \approx \frac{CA_0}{RR'} e^{ik(R+R')} (\cos \alpha + \cos \alpha') \int_B e^{ikr_0(\sin \alpha + \sin \alpha')} dB. \quad (2.29)$$

Diese Näherung betrachtet die einfallenden wie auslaufenden Strahlen als parallel, wie wir es bereits in den Überlegungen der vorangegangenen Unterabschnitte stillschweigend angenommen haben. Der Gangunterschied ist dabei gegeben als

$$r - R + r' - R' \approx r_0(\sin \alpha + \sin \alpha'),$$

was sich zuvor aus geometrischen Überlegungen ergab. Nehmen wir in den Entwicklungen noch die quadratischen Terme mit hinzu, so gelangen wir zur *Fresnelschen Näherung*, auf die hier nicht genauer eingegangen werden kann.

## Stichwortverzeichnis

<b>Abbildung, Matrixschreibweise einer</b> .....	<b>32</b>
Abbildungsgleichung einer optischen Linse .....	33
Abbildungsgleichung eines Hohlspiegels .....	29
Abschneidefrequenz eines Hohlleiters .....	14
Arago, Dominique François (1786–1853) .....	25
Aragoscher Punkt .....	25
Auftreffpunkt eines Hohlspiegels .....	28
Ausfallwinkel .....	20
außerdordentlicher Strahl der Doppelbrechung .....	27
<b>Babinet, Jacques (1794–1872)</b> .....	<b>25</b>
Babinetscher Punkt .....	25
Babinetsches Theorem .....	41
Beugung (Fraunhofersche) .....	40
Beugungsformel, Kirchhoff-Fresnelsche .....	42
bikonkave Linse .....	33
bikonvexe Linse .....	33
Bildecke .....	29
Bildweite $b$ .....	29
Brechkraft .....	33
Brechung .....	20
Brechungsgesetz, Snelliussches .....	21
Brechungsindex $n$ .....	21
Brennpunkt eines Hohlspiegels .....	28
Brennstrahl eines Hohlspiegels .....	30
Brennweite $f$ einer optischen Linse .....	33
Brennweite $f$ eines Hohlspiegels .....	28
Brewster, Sir David (1781–1868) .....	24
Brewsterwinkel .....	24
<b>defokussierende Linse</b> .....	<b>33</b>
destruktive Interferenz .....	35
Dielektrizität $\epsilon$ .....	5
Dielektrizitätskonstante $\epsilon_0$ .....	5
Dioptrie $dpt$ .....	33
Dispersionsrelation .....	9
doppelbrechender Kristall (positiv, negativ) .....	27
Doppelbrechung .....	27
Doppelspiegel, Fresnelscher .....	39
Driftlänge, effektive .....	33
Driftstrecke .....	33
Durchlässigkeit .....	24
<b>effektive Driftlänge</b> .....	<b>33</b>
Eindringtiefe des Tunneleffektes .....	26
Eindringtiefe elektromagnetischer Strahlung .....	18

Einfallwinkel .....	19
elektrische Feldstärke $\vec{E}$ (freie $\vec{D}$ ) .....	5
elektrische Suszeptibilität $\chi_E$ .....	5
elektrische Verschiebungsdichte $\vec{D}$ .....	5
Elementarwellen, Huygenssche .....	19
Energiedichte $w$ .....	7
Energieflußdichte $\vec{S}$ .....	7
<b>Fabry-Perotsches Spektrometer</b> .....	<b>40</b>
Fermat, Pierre de (1601–1665) .....	20
Fermatsches Prinzip .....	20
Fokus eines Hohlspiegels .....	28
fokussierende Linse .....	33
Fraunhofer, Joseph (1787–1826) .....	40
Fraunhofersche Beugung .....	40
Fraunhofersche Näherung .....	43
freie elektrische Feldstärke $\vec{D}$ .....	5
Fresnel, Augustin Jean (1788–1827) .....	24
Fresnelsche Formeln .....	24
Fresnelsche Näherung .....	43
Fresnelscher Doppelspiegel .....	39
<b>Gangunterschied</b> .....	<b>35</b>
Gegenstandsebene .....	29
Gegenstandsweite $g$ .....	29
Gehrcke, Ernst (1878–1960) .....	40
Gruppengeschwindigkeit .....	14
<b>Hauptachse eines Hohlspiegels</b> .....	<b>28</b>
Hauptmaxima .....	36
Hochpaß .....	14
Hohlleiter .....	12
Huygens, Christian (1629–1695) .....	19
Huygenssche Elementarwellen .....	19
Huygenssches Prinzip .....	19
<b>Impulsdichte</b> $\vec{g}$ .....	<b>7</b>
Intensität $I$ .....	34
Interferenz (konstruktive, destruktive) .....	35
Interferometer .....	38
<b>Katakaustik</b> .....	<b>29</b>
Kirchhoff, Gustav Robert (1824–1887) .....	43
Kirchhoff-Fresnelsche Beugungsformel .....	42
Kohärenz .....	34, 38
Kohärenzlänge .....	38
konkav .....	33
konstruktive Interferenz .....	35
konvex .....	33

Seite 46 .....	<i>Optik</i>
Kraft .....	7
Kreisfrequenz $\omega$ .....	9
<b><math>\lambda/2</math>-Platte</b> .....	<b>26</b>
$\lambda/4$ -Platte .....	26
Lateralvergrößerung eines Hohlspiegels .....	30
Leistung .....	6
Leiter, perfekter .....	11
Lichtes, Begriff des .....	19
Lichtstrahl .....	19, 28
linear polarisiertes Licht .....	26
Linse, optische .....	31
Linsengleichung .....	33
Lorentzkraft .....	6
Lummer, Otto (1860–1935) .....	40
<b>magnetische Feldstärke <math>\vec{B}</math> (freie <math>\vec{H}</math>)</b> .....	<b>5</b>
magnetische Suszeptibilität $\chi_M$ .....	5
Magnetisierung $\vec{M}$ .....	5
materieabhängige Maxwellsche Gleichungen .....	5
Matrixschreibweise einer Abbildung .....	32
Maximalwinkel der Totalreflexion .....	25
Maxwell, James Clerk (1831–1879) .....	5
Maxwellsche Gleichungen, materieabhängige .....	5
Maxwellscher Spannungstensor $T$ .....	7
Michelson, Albert Abraham (1852–1931) .....	38
Mittelpunkt eines Hohlspiegels .....	28
Mittelpunktstrahl eines Hohlspiegels .....	30
Moden, elektromagnetische .....	12
<b>Nebenmaxima</b> .....	<b>36</b>
<b>Ohmsches Gesetz</b> .....	<b>17</b>
optische Achse der Doppelbrechung .....	27
ordentlicher Strahl der Doppelbrechung .....	27
<b>Parabolspiegel</b> .....	<b>29</b>
Parallelstrahl eines Hohlspiegels .....	30
paraxiale Strahlen .....	29
perfekter Leiter .....	11
Permeabilität $\mu$ .....	5
Permeabilitätskonstante $\mu_0$ .....	5
Phasengeschwindigkeit .....	14
Pointingscher Vektor $\vec{S}$ .....	7
Polarisation $\vec{P}$ .....	5
polarisiertes Licht (linear, zirkular) .....	26
<b>Quantisierung</b> .....	<b>13</b>
Quantisierungsrichtung .....	13

<b>Reflexion</b> .....	<b>20</b>
Reflexionsvermögen .....	24
<b>Sammellinse</b> .....	<b>33</b>
Scheitelpunkt eines Hohlspiegels .....	28
Scheitelstrahl eines Hohlspiegels .....	30
Skindicke .....	18
Skineffekt .....	18
Snell, Willebrord van Royen (1580–1621) .....	21
Snelliussches Brechungsgesetz .....	21
Spannungstensor $T$ , Maxwellscher .....	7
Spektrometer .....	39
sphärische Aberration eines Hohlspiegels .....	29
Streulinse .....	33
Superposition .....	36
Suszeptibilität (elektrische $\chi_E$ , magnetische $\chi_M$ ) .....	5
<b>TE-Mode (transversal elektrisch)</b> .....	<b>12</b>
TEM-Mode .....	14
TM-mode (transversal magnetisch) .....	12
Totalreflexion .....	25
Transmissionslinie .....	10
transversal elektrische Wellen .....	12
transversal magnetische Wellen .....	12
Tunneleffekt .....	26
<b>Verschiebungsdichte <math>\vec{D}</math>, elektrische</b> .....	<b>5</b>
Viererspannungstensor $T$ , elektromagnetischer .....	8
<b>Wellengeschwindigkeit</b> .....	<b>14</b>
Wellenleiter .....	9
Wellenpakete .....	38
Wellenvektor $\vec{k}$ .....	9
Wellenwiderstand .....	11
<b>Zentralbild der Beugung</b> .....	<b>40</b>
zirkular polarisiertes Licht .....	26